UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 4 2023-10

6 de mayo de 2023

1. Resolver los siguientes ejercicios del texto guía. Allí se indica primero la Sección y después de los dos puntos los ejercicios sugeridos:

   a) 7.1: 19-36, 41.

   b) 7.2: 12,15,16,22, 25-30, 37-40.

   c) 7.3: 9,10,15,16,17,19,20, 27-30, 37-48, 63-75.

   d) 7.4: 7-14, 19-32, 37-46, 49-55, 63.

2. Evalúe

   a) $\mathcal{L}\{e^t \sin 3t\}$.

   b) $\mathcal{L}\{e^{3t}(9 - 4t + 10 \sin \frac{t}{2})\}$.

   c) $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$.

   d) $\mathcal{L}\{(t-1)\mathcal{U}(t-1)\}$.

   e) $\mathcal{L}\{e^{2-t}\mathcal{U}(t-2)\}$.

   f) $\mathcal{L}\{\sin t\, \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2})\}$.

   g) $\mathcal{L}\{\cos t\, \mathcal{U}(t-\pi)\}$.

3. Evalúe

   a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$.

   b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$.

   c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s(s^2+2s+5)}\right\}$.

   d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s(s^2+2s+5)}e^{-3s}\right\}$.

   e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{13}{s(s^2+6s+13)}\right\}$.

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{13}{s(s^2-6s+13)}e^{-5s}\right\}$.

g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\}$.

h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)}e^{-2s}\right\}$.

4. Resuelva el PVI dado.

a) $y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1. \end{cases}$$

b) $y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

c)
- Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{3}{s} - \dfrac{6}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ -3 & \text{si} \quad t \ge 1. \end{cases}$
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s(s^2+4s+6))}\right\} = 1 - e^{-2t}\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\,e^{-2t}\sin(\sqrt{2}t)$.
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s(s^2+4s+6)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-2(t-1)}\cos\sqrt{2}(t-1)\cdot\mathcal{U}(t-1) - \sqrt{2}e^{-2(t-1)}\sin\sqrt{2}(t-1)\cdot\mathcal{U}(t-1)$.
- Resuelva el PVI

  $$x'' + 4x' + 6x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

  donde $f(t)$ es la función del inciso *a*).

d)
- Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{si} \quad t \ge 1. \end{cases}$
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\} = 1 - e^{-t}$.
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$.
- Resuelva el PVI

  $$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$$

  donde $f(t)$ es la función del inciso *a*).

e)
- Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ -2 & \text{si} \quad t \ge 1. \end{cases}$
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$.

- Resuelva el PVI

$$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$$

donde $f(t)$ es la función del inciso a).

5. Determine la solución de las siguientes ecuaciones integrales e integro-diferenciales

a)

$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau, \quad y(0) = 1.$$

b)

$$\int_0^t f(\tau)f(t-\tau)d\tau = 6t^3.$$

c)

$$y'(t) = 1 - \sin t - \int_0^t y(\tau)d\tau, \quad y(0) = 0.$$

d)

$$\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)d\tau = 1, \quad y(0) = 0.$$

e)

$$y'(t) + 2y + \int_0^t y(\theta)d\theta = 1, \quad y(0) = 0.$$

f)

$$f(t) + \int_0^t f(y)(t-y)\,dy = t.$$

g)

$$t - 2f(t) = \int_0^t f(t-y)(e^y - e^{-y})\,dy.$$

h)

$$f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 4e^{-t} + \sin t.$$

i)

$$f(t) = 1 + t - \frac{8}{3}\int_0^t (t-y)^3 f(y)\,dy.$$

j)

$$f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t-\tau)\,d\tau.$$

k)

$$f(t) = 2t - 4\int_0^t \sin\tau f(t-\tau)\,d\tau.$$

l)

$$f(t) + 3\int_0^t f(y)\sin(t-y)\,dy = -3\int_0^t \sin(2y)\sin(t-y)\,dy.$$

$m)$

$$f(t)-2\int_0^t f(y)\sin(2(t-y))dt = t-\cos t\,\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

$n)$

$$f'\left(t\right)+13\int_0^t f\left(x\right)\,\mathrm{d}x-6\,f\left(t\right)=13\,t+13\left(t-2\right)\mathscr{U}\left(t-2\right),\quad f(0)=0.$$

$\tilde{n})$

$$f'\left(t\right)+18\int_0^t f(x)\,dx-6\,f(t)=18t+18\left(t-3\right)\mathscr{U}\left(t-3\right),\quad f(0)=0.$$