I

Solución de P2 EDO2022-30 Fila A.

(1) solución:

Capacidad del tanque 400 galones.

$V_0 = 300$ gal (volumen inicial de solución).

$A(0) = 20$ libras de sal (cantidad inicial de sal en el tanque).

$c_e = 4$ lib/gal (concentración de sal de entrada).

$r_e = 3$ gal/min. (razón de entrada de solución).

$r_s = 9$ gal/min. (razón de salida de solución).

a) $V(t) = V_0 + (r_e - r_s)t = 300 + (3-9)t \Rightarrow V(t) = 300 - 6t.$

$V(t) = 0 \Rightarrow 300 - 6t = 0 \Rightarrow 6t = 300 \Rightarrow t = \frac{300}{6} = 50.$

El tanque queda vacío a los 50 minutos.

b) $\frac{dA}{dt}$ = Razón de entrada de sal − Razón de salida de sal

$$= r_e c_e - r_s\, c(t)$$
$$= 12 - 9\,\frac{A(t)}{V(t)}$$
$$= 12 - \frac{9A}{300-6t}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} + \frac{9}{300-6t}A = 12 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \frac{dA}{dt} + \frac{9}{300-6t}A = 12 \\ A(0) = 20 \end{cases}}$$

ó

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dA}{dt} + \frac{3}{100-2t}A = 12 \\ A(0) = 20 \end{cases}}$$

(2) Considere la ED $x^2y'' - 2xy' - 10y = 0$.

a) $y_1(x) = x^{-2}$. Dividiendo la ED por x^2: $y'' - \frac{2}{x}y' - \frac{10}{x^2}y = 0$

$P(x) = -\frac{2}{x}$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{[y_1]^2}dx$$

$$= x^{-2}\int \frac{e^{-\int -\frac{2}{x}dx}dx}{[x^{-2}]^2} = x^{-2}\int \frac{e^{2\ln x}dx}{x^{-4}} = x^{-2}\int \frac{e^{\ln x^2}dx}{x^{-4}}$$

$$= x^{-2}\int \frac{x^2}{x^{-4}}dx = x^{-2}\int x^6 dx = x^{-2}\left(\tfrac{1}{7}x^7 + \cancel{c}\right) = \tfrac{1}{7}x^5$$

$\Rightarrow y_2 = \frac{1}{7}x^5.$

b) La solución general de la ED es:

$y = c_1 x^{-2} + c_2 \frac{1}{7}x^5$ o equivalentemente $y = c_1 x^{-2} + c_2 x^5$.

(3) Veamos que $y_1 = 4$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^{-3}$ forman un conjunto fundamental de soluciones (CFS) para la ED

$$x^3y''' + 4x^2y'' - 4xy' = 0 \quad \text{en} \quad I = (0,\infty).$$

$y_1 = 4,\ y_1' = 0,\ y_1'' = 0,\ y_1''' = 0 \Rightarrow x^3y_1''' + 4x^2y_1'' - 4xy_1' = 0 + 0 - 0 = 0$ para todo $x \in I$

$\Rightarrow y_1$ es una solución de la ED en I.

$y_2 = x^2,\ y_2' = 2x,\ y_2'' = 2,\ y_2''' = 0 \Rightarrow x^3y_2''' + 4x^2y_2'' - 4xy_2'$

$= x^3(0) + 4x^2(2) - 4x(2x)$

$= 0 + 8x^2 - 8x^2 = 0$ para todo $x \in I$.

$\Rightarrow y_2$ es una solución de la ED en I.

$y_3 = x^{-3},\ y_3' = -3x^{-4},\ y_3'' = 12x^{-5},\ y_3''' = -60x^{-6}$.

$\Rightarrow x^3y_3''' + 4x^2y_3'' - 4xy_3' = x^3(-60x^{-6}) + 4x^2(12x^{-5}) - 4x(-3x^{-4})$

$= -60x^{-3} + 48x^{-3} + 12x^{-3}$

$= -60x^{-3} + 60x^{-3} = 0$ para todo $x \in I$.

$\Rightarrow y_3$ es una solución de la ED en I.

Ahora se calcula el Wronskiano W de las tres soluciones:

$$W = \begin{vmatrix} 4 & x^2 & x^{-3} \\ 0 & 2x & -3x^{-4} \\ 0 & 2 & 12x^{-5} \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2x & -3x^{-4} \\ 2 & 12x^{-5} \end{vmatrix} = 4(24x^{-4} + 6x^{-4}) = 4(30x^{-4}) = 120x^{-4}$$

$\Rightarrow W = 120x^{-4}$.

Como $W = 120x^{-4} \neq 0$ para todo $x > 0$, entonces y_1, y_2, y_3 son linealmente independientes en I.

Por todo lo anterior se concluye que y_1, y_2, y_3 forman un CFS para la ED en I.

(4) $y^{(4)} + 5y^{(3)} + 3y'' - 9y' = 0 \Rightarrow$ Ecuación auxiliar: $m^4 + 5m^3 + 3m^2 - 9m = 0$

$\Rightarrow m(m^3 + 5m^2 + 3m - 9) = 0 \Rightarrow m = 0$ ó $m^3 + 5m^2 + 3m - 9 = 0$

$e^{0x} = 1 \leftarrow m_1 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -9 & \underline{1} \\ & 1 & 6 & 9 & \\ \hline 1 & 6 & 9 & \boxed{0} & \end{array} \rightarrow m_2 = 1$$

$m^2 + 6m + 9 = 0$

$\underbrace{(m+3)^2}_{=(m+3)(m+3)} = 0 \rightarrow m+3 = 0,\ m+3 = 0$

$m_3 = -3,\ m_4 = -3$

$\Rightarrow$ La solución general de la ED es:

$$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-3x} + c_4xe^{-3x}.$$