UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística

Solución del Examen Final de ED, FILA A

1. [**1.5 pts**] Considere la función $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ 34e^{6(t-2)}, & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$

   a) [0.5 pts] Escriba la función $f(t)$ en términos de una función escalón unitario.

   Solución:
$$f(t) = 0 + \left(34e^{6(t-2)} - 0\right)\mathcal{U}\left(t-2\right) = 34e^{6(t-2)}\mathcal{U}\left(t-2\right).$$

   b) [1.0 pts] Calcule detalladamente $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$.

   Solución: Por la parte *a*) y el teorema de traslación en t, se tiene que
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{34e^{6(t-2)}\mathcal{U}\left(t-2\right)\right\} \\ &= 34e^{-2s}\mathcal{L}\left\{e^{6t}\right\} \\ &= 34e^{-2s}\frac{1}{s-6}.\end{aligned}$$

2. [**1.5 pts**] Calcule detalladamente

   a) [1.0 pts] $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{34}{s^2-6s+34}\right\}$.

   Solución:
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{34}{s^2-6s+34}\right\} &= 34\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2-6s+9)-9+34}\right\} \\ &= 34\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-3\right)^2+25}\right\} \\ &= 34e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+25}\right\} \quad \text{(debido al teorema de traslación en } s\text{)} \\ &= \frac{34}{5}e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+25}\right\} \\ &= \frac{34}{5}e^{3t}\sin\left(5t\right).\end{aligned}$$

   b) [0.5 pts] $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\dfrac{34}{s^2-6s+34}\right\}$.

   Solución: Aplicando el teorema de traslación en t, es decir
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}G(s)\right\} = \mathcal{U}(t-a)g(t-a) = \mathcal{U}(t-a)\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}_{t\mapsto t-a},$$
   y la parte 2*a*), resulta
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{34}{s^2-6s+34}\right\} &= \mathcal{U}(t-2)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{34}{s^2-6s+34}\right\} \\ &= \frac{34}{5}\mathcal{U}(t-2)e^{3(t-2)}\sin\left(5\left(t-2\right)\right).\end{aligned}$$

3. [**2.0 pts**] Encuentre la solución $y(t)$ de la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) + 34 \int_0^t e^{6(t-\tau)} y(\tau) d\tau = f(t), \quad y(0) = 0,$$

donde $f(t)$ es la función del primer punto.

Solución: Sea $y(t)$ la solución del problema y $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y usando el resultado del punto 1b), se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} + 34\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{6(t-\tau)} y(\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0} + 34\mathcal{L}\left\{y(t) * e^{6t}\right\} = 34e^{-2s}\frac{1}{s-6}$$

$$sY(s) + 34Y(s)\frac{1}{s-6} = 34e^{-2s}\frac{1}{s-6} \quad \text{(debido al teorema de convolución)}$$

Multiplicando esta última igualdad por $s-6$ y después sacando el factor común $Y(s)$ a la izquierda de la igualdad, se obtiene

$$s\,(s-6)\,Y(s) + 34Y(s) = 34e^{-2s}$$

$$\left(\underbrace{s\,(s-6) + 34}_{=s^2-6s+34}\right) Y(s) = 34e^{-2s}$$

Luego

$$Y(s) = \frac{34e^{-2s}}{s^2 - 6s + 34}.$$

Ahora, usando el resultado del punto 2b), se concluye que la solución $y(t)$ del problema es

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{34e^{-2s}}{s^2 - 6s + 34}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{34}{s^2 - 6s + 34}\right\} \\
&= \frac{34}{5}\mathcal{U}(t-2)e^{3(t-2)}\sin\left(5\,(t-2)\right).
\end{aligned}$$