① Use la sustitución $y=ux$ para resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases}(5x^2+2y^2)\,dx-2xy\,dy=0, & x>0,\\ y(1)=4.\end{cases}$$

Sol: $y=ux \Rightarrow dy=u\,dx+x\,du.$

$$(5x^2+2(ux)^2)\,dx-2x\overset{(ux)}{y}(u\,dx+x\,du)=0$$

$$(5x^2+2x^2u^2)\,dx-2x^2u(u\,dx+x\,du)=0$$

$$x^2(5+2u^2)\,dx-2x^2u(u\,dx+x\,du)=0$$

$$\xRightarrow{\div x^2}(5+2u^2)\,dx-2u(u\,dx+x\,du)=0$$

$$5\,dx+\cancel{2u^2dx}-\cancel{2u^2}dx-2xu\,du=0$$

$$5\,dx=2xu\,du \Rightarrow u\,du=\frac{5}{2}\frac{dx}{x} \Rightarrow \int u\,du=\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{2}=\frac{5}{2}\ln(x)+c \xRightarrow{(\times 2)} u^2=5\ln(x)+C$$

$$\xRightarrow{u=y/x} \frac{y^2}{x^2}-5\ln(x)=C$$

$$\xRightarrow{x=1,\,y=4} \frac{4^2}{1^2}-5\cancel{\ln(1)}^{0}=C \Rightarrow C=16$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{x^2}-5\ln(x)=16}$$ solución del PVI.

② Halle la solución general de la ecuación de Bernoulli. Además exprese dicha solución de manera explícita.

$$x^2\frac{dy}{dx}-2xy=3y^4, \quad x>0.$$

Sol.: $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=\frac{3}{x^2}y^4$ ① $(\Rightarrow n=4)$

$u=y^{1-n}=y^{1-4}=y^{-3} \Rightarrow u=y^{-3},\ \frac{du}{dx}=-3y^{-4}\frac{dy}{dx}$ ②

Multiplamos ① por $-3y^{-4}$:

$$-3y^{-4}\frac{dy}{dx}+\frac{6}{x}y^{-3}=\frac{-9}{x^2} \xRightarrow{②} \boxed{\frac{du}{dx}+\frac{6}{x}u=-\frac{9}{x^2}}$$ ③

ED lineal en u, de orden 1.

$p(x) = \frac{6}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{6}{x}dx} = e^{6Ln(x)} = e^{Ln(x^6)} = x^6$

$\Rightarrow \mu(x) = x^6$ es un factor integrante para ③.

Por tanto, al multiplicar ③ por $\mu(x) = x^6$, resulta que

$x^6 u = \int x^6(-\frac{9}{x^2})dx \Rightarrow x^6 u = -9\int x^4 dx = -9\frac{x^5}{5} + c$

$\Rightarrow x^6 y^{-3} = -\frac{9}{5}x^5 + c \Rightarrow y^{-3} = \frac{-\frac{9}{5}x^5 + c}{x^6} = -\frac{9}{5}x^{-1} + cx^{-6}$

$\Rightarrow \frac{1}{y^3} = -\frac{9}{5}x^{-1} + cx^{-6} \Rightarrow y^3 = \frac{1}{cx^{-6} - \frac{9}{5}x^{-1}} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{\frac{1}{cx^{-6} - \frac{9}{5}x^{-1}}}}$

③ $(2x + 4y^3)dx + 3xy^2 dy = 0, \quad x > 0. \quad (1)$

a) $M = 2x + 4y^3 \Rightarrow M_y = 0 + 12y^2 = 12y^2$
$N = 3xy^2 \Rightarrow N_x = 3y^2$
$\}$ Como $M_y \neq N_x \Rightarrow$ La ED no es exacta.

b) $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{12y^2 - 3y^2}{3xy^2} = \frac{9\cancel{y^2}}{3x\cancel{y^2}} = \frac{3}{x}$ solo depende de x.

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3Ln(x)} = e^{Ln(x^3)} = x^3$

$\Rightarrow \mu(x) = x^3$ es un factor integrante para la ED.

Multiplicando la ED dada por este factor, obtenemos:

$(2x^4 + 4x^3y^3)dx + 3x^4y^2 dy = 0. \quad (2)$

$\bar{M} = 2x^4 + 4x^3y^3 \Rightarrow \bar{M}_y = 0 + 12x^3y^2 = 12x^3y^2$

$\bar{N} = 3x^4y^2 \Rightarrow \bar{N}_x = 12x^3y^2 = \bar{M}_y \Rightarrow$ La ED (2) es exacta.

c) La solución general de (1) es la misma solución general de (2). Así que resolveremos (2).

Buscamos una función $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = \bar{M} = 2x^4 + 4x^3y^3$ (i) $\quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \bar{N} = 3x^4y^2$ (ii)

Integrando (ii) respecto a x:

$$f(x,y) = \int (2x^4 + 4x^3y^3)\,dx + g(y)$$

$$= 2\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^4}{4}y^3 + g(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{2}{5}x^5 + x^4y^3 + g(y) \leftarrow \text{(iii)}$$

Derivando (iii) respecto a y e igualando a $\overline{N}$, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \cancel{3x^4y^2} + g'(y) = \cancel{3x^4y^2} \Rightarrow g'(y) = 0$$

$$\overset{\int dy}{\Rightarrow} g(y) = c_1$$

Luego $f(x,y) = \frac{2}{5}x^5 + x^4y^3 + c_1$

Así la solución general de la ED es

$$f(x,y) = \frac{2}{5}x^5 + x^4y^3 + c_1 = c_2,$$

o equivalentemente

$$\boxed{\frac{2}{5}x^5 + x^4y^3 = C,}$$

donde C es una constante real arbitraria.