

SOLUCIÓN

1. a) [1.0 pts] Considere la función $f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ 4, & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$

Calcule detalladamente $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Solución:

$$f(t) = 2t + (4 - 2t)U(t - 2) = 2t - 2(t - 2)U(t - 2).$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= 2\mathcal{L}\{t\} - 2\mathcal{L}\{(t - 2)U(t - 2)\} \\ &= 2\frac{1}{s^2} - 2e^{-2s}\mathcal{L}\{t\} \\ &= 2\frac{1}{s^2} - 2e^{-2s}\frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

- b) [1.0 pts] Calcule detalladamente, usando el teorema de convolución, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= t * e^{-2t} \\ &= \int_0^t \tau e^{-2(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{-2t} \int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau \\ &= e^{-2t} \left(\tau \frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{1}{2} e^{2\tau} d\tau \right) \\ &= e^{-2t} \left(\frac{t}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_0^t \right) \\ &= e^{-2t} \left(\frac{t}{2} e^{2t} - \frac{1}{4} (e^{2t} - 1) \right) \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2t}. \end{aligned}$$

2. [1.0 pts] Encuentre la solución $y = y(t)$ del problema de valor inicial

$$y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0,$$

donde la $f(t)$ es la función dada en la pregunta 1a).

Solución: Sean $y = y(t)$ la solución del problema de valor inicial y $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Aplicando la transformada de Laplace a la ED, se obtiene

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Ahora se usa la propiedad $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}$ y el resultado de la parte 1a):

$$\begin{aligned} sY(s) + 2Y(s) &= 2\frac{1}{s^2} - 2e^{-2s}\frac{1}{s^2} \\ (s+2)Y(s) &= 2\frac{1}{s^2} - 2e^{-2s}\frac{1}{s^2} \\ Y(s) &= 2\frac{1}{s^2(s+2)} - 2e^{-2s}\frac{1}{s^2(s+2)}. \end{aligned}$$

Como $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, se sigue del resultado del inciso 1b) y del segundo teorema de traslación (o teorema de traslación en t) que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s^2(s+2)}\right\} \\ &= 2\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right) - 2\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right)_{t \rightarrow t-2} U(t-2) \\ &= 2\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right) - 2\left(\frac{t-2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2(t-2)}\right) U(t-2). \end{aligned}$$

3. [2.0 pts] Encuentre la solución $f(t)$ de la ecuación integral

$$f(t) = \int_0^t e^{2y}(t-y)dy + \int_0^t 4yf(t-y)dy.$$

Solución: Sean $f(t)$ la solución de la ecuación integral y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación, se obtiene

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{2y}(t-y)dy\right\} + 4\mathcal{L}\left\{\int_0^t yf(t-y)dy\right\}. \quad (1)$$

Ahora, note que

$$\int_0^t e^{2y}(t-y)dy = e^{2t} * t \quad \text{y} \quad \int_0^t yf(t-y)dy = t * f(t).$$

O sea que (1) se puede escribir como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2t} * t\} + 4\mathcal{L}\{t * f(t)\}.$$

Aplicando el teorema de convolución, se sigue de esta última ecuación que

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \mathcal{L}\{t\} + 4\mathcal{L}\{t\} F(s) \\ &= \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{s^2} + 4\frac{1}{s^2} F(s). \end{aligned}$$

Despejando $F(s)$:

$$\begin{aligned} F(s) - \frac{4}{s^2} F(s) &= \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{s^2} \\ \left(\frac{s^2-4}{s^2} \right) F(s) &= \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{s^2} \\ F(s) &= \frac{1}{(s^2-4)(s-2)} = \frac{1}{(s-2)(s+2)(s-2)}, \end{aligned}$$

luego

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)^2(s+2)}.$$

Como $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, se sigue del teorema de convolución que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^2} \frac{1}{s+2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^2} \right\} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} \\ &= \left(e^{2t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \right) * e^{-2t} \\ &= (e^{2t} t) * e^{-2t}. \end{aligned}$$

Calculando la convución, resulta

$$\begin{aligned} f(t) &= (e^{2t} t) * e^{-2t} \\ &= \int_0^t e^{2\tau} \tau e^{-2(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{-2t} \int_0^t \tau e^{4\tau} d\tau \\ &= e^{-2t} \left(\tau \frac{1}{4} e^{4\tau} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{1}{4} e^{4\tau} d\tau \right) \\ &= e^{-2t} \left(\frac{t}{4} e^{4t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} e^{4\tau} \Big|_0^t \right) \\ &= e^{-2t} \left(\frac{t}{4} e^{4t} - \frac{1}{16} (e^{4t} - 1) \right). \end{aligned}$$

Así, la solución de la ecuación integral es

$$f(t) = e^{-2t} \left(\frac{t}{4} e^{4t} - \frac{1}{16} (e^{4t} - 1) \right).$$