Solución de P1 EDO 2023-10, Fila A

① Use la sustitución $x = zy$ para hallar la solución general de la ED

$$y\,dx - (x + \sqrt[5]{x^3y^2})\,dy = 0, \quad y > 0.$$

Solución: $x = zy$, $dx = y\,dz + z\,dy$. Sustituyendo esto en la ED, resulta:

$$y(y\,dz + z\,dy) - (zy + \sqrt[5]{(zy)^3y^2})\,dy = 0$$

$$y^2dz + \cancel{yz\,dy} - \cancel{zy\,dy} - \sqrt[5]{z^3y^5}\,dy = 0$$

$$y^2dz - y\sqrt[5]{z^3}\,dy = 0 \Rightarrow y^2dz = y\sqrt[5]{z^3}\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{\sqrt[5]{z^3}} = \frac{\cancel{y}\,dy}{y^{\cancel{2}}} \Rightarrow \int z^{-3/5}\,dz = \int \frac{dy}{y} \qquad \left(\text{Nota: } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{z^{-3/5+1}}{-\frac{3}{5}+1} = \ln(y) + c \Rightarrow \frac{z^{2/5}}{2/5} = \ln(y) + c$$

$$\xRightarrow{z = x/y} \boxed{\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{2/5} = \ln(y) + c}$$

② Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y^3(x - 2y^{-2}), \quad y(0) = 2,$$

donde la ED es de Bernoulli.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = xy^3 - 2y \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} + 2y = xy^3} \text{ ①} \quad \text{(ED de Bernoulli con } n=3).$$

Sea $u = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$, es decir,

$$u = y^{-2}, \quad \frac{du}{dx} = \underbrace{-2y^{-3}}\frac{dy}{dx} \quad ②$$

Multiplicando la ec. ① por $-2y^{-3}$, resulta

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} - 2y^{-3}\,2y = -2y^{-3}\,xy^3$$

$$\overset{②}{\Rightarrow} \frac{du}{dx} - 4y^{-2} = -2x \overset{②}{\Rightarrow} \boxed{\frac{du}{dx} - 4u = -2x} \text{ ③}$$

ED lineal de orden 1.

Ahora se resuelve la ED ③. Un factor integrante para esta ED es

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -4dx} = e^{-4x}.$$

Al multiplicar ③ por $\mu = e^{-4x}$, se obtiene:

$$\underbrace{e^{-4x}\frac{du}{dx} - 4e^{-4x}u}_{= \frac{d}{dx}[e^{-4x}u]} = -2x e^{-4x}$$

$$\stackrel{\int dx}{\Longrightarrow} e^{-4x}u = -2\int x e^{-4x}dx$$

Integración por partes con $U = x$, $dV = e^{-4x}dx$

$$e^{-4x}u = -2[UV - \int V dU]$$

$$= -2\left[x\frac{e^{-4x}}{-4} - \int \frac{e^{-4x}}{-4}dx\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}xe^{-4x} - \frac{1}{2}\int e^{-4x}dx + c$$

$$= \frac{1}{2}xe^{-4x} - \frac{1}{2}\frac{e^{-4x}}{-4} + c$$

$$\stackrel{u=y^{-2}}{\Longrightarrow} e^{-4x}y^{-2} = \frac{1}{2}xe^{-4x} + \frac{1}{8}e^{-4x} + c. \quad ④$$

Usando en esta última ecuación la condición inicial $y(0)=2$:

$$e^{0}(2)^{-2} = \frac{1}{2}0e^{0} + \frac{1}{8}e^{0} + c \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + c \Rightarrow c = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{8}.$$

Sustituyendo $c = 1/8$ en ④:

$$e^{-4x}y^{-2} = \frac{1}{2}xe^{-4x} + \frac{1}{8}e^{-4x} + \frac{1}{8},$$

equivalentemente (después de multiplicar por e^{4x}):

$$\boxed{y^{-2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{4x}}$$

es la solución del PVI.

(3) Considere la ED:

$$(5x^2 - xy + x^4 e^{x^2})\,dx + (x^2 + x^3 y)\,dy = 0, \quad x > 0.$$

a) $M = 5x^2 - xy + x^4 e^{x^2}$, $\quad N = x^2 + x^3 y$,

$M_y = -x$, $\quad N_x = 2x + 3x^2 y$.

Como $M_y \neq N_x$, La ED no es exacta.

b) $$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-x - (2x + 3x^2 y)}{x^2 + x^3 y} = \frac{-x - 2x - 3x^2 y}{x^2(1 + xy)}$$

$$= \frac{-3x - 3x^2 y}{x^2(1 + xy)}$$

$$= \frac{-3x\cancel{(1 + xy)}}{x^2\cancel{(1 + xy)}} = -\frac{3}{x}$$ solo depende de x.

$$\Rightarrow \mu = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln(x)} = e^{\ln(x^{-3})} = x^{-3}$$ es un factor integrante para la ED.

Ahora multiplicamos La ED por $\mu = x^{-3}$:

$$x^{-3}(5x^2 - xy + x^4 e^{x^2})\,dx + x^{-3}(x^2 + x^3 y)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow (5x^{-1} - x^{-2} y + x e^{x^2})\,dx + (x^{-1} + y)\,dy = 0. \quad (2)$$

$\bar{M} = 5x^{-1} - x^{-2} y + x e^{x^2}$, $\quad \bar{N} = x^{-1} + y$

$\bar{M}_y = -x^{-2}$, $\quad \bar{N}_x = -x^{-2}$ $\Rightarrow \bar{M}_y = \bar{N}_x$ y por tanto la ED (2) es exacta.

c) Ahora buscaremos una función $f(x,y)$ tal que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \bar{M}} \ (*_1) \quad \wedge \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \bar{N}} \ (*_2)$$

$$\xrightarrow{\int (*_2) dy} f(x,y) = \int \bar{N}\,dy + g(x) = \int (x^{-1} + y)\,dy + g(x)$$

$$f(x,y) = x^{-1} y + \frac{y^2}{2} + g(x). \quad (*_3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\cancel{x^{-2} y} + 0 + g'(x) \overset{(*_1)}{=} \bar{M} = 5x^{-1} - \cancel{x^{-2} y} + x e^{x^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 5x^{-1} + x e^{x^2} \Rightarrow g(x) = 5\int x^{-1}dx + \int x e^{x^2} dx$$

$u = x^2, \quad du = 2x\,dx$

$$g(x) = 5\ln(x) + \frac{1}{2}\int e^{x^2} 2x\,dx$$

$$= 5\ln(x) + \frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$= 5\ln(x) + \frac{1}{2}e^{u} = 5\ln(x) + \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

Sustituyendo $g(x)$ en $(*_3)$, resulta que

$$f(x,y) = x^{-1}y + \frac{y^2}{2} + 5\ln(x) + \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

Por consiguiente, la solución general de la ED (1) es

$$\boxed{x^{-1}y + \frac{y^2}{2} + 5\ln(x) + \frac{1}{2}e^{x^2} = c,}$$

donde c es una constante real arbitraria.