Segundo parcial de Ecuaciones Diferenciales
P2 EDO2023-10
FILA A

Departamento de Matemáticas y Estadística

SOLUCIÓN

1. [1.4 pts] Un tanque con capacidad de 400 galones contiene inicialmente 160 galones de salmuera (solución salina) en los que se han disuelto 40 libras de sal. Al tanque se vierte agua pura a razón de 5 galones por minuto. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 3 galones por minuto.

   (a) [0.2 pts] Determine la concentración de sal que hay en el tanque al inicio.

   (b) [0.2 pts] Determine el instante en que el tanque está por a mitad de su capacidad.

   (c) [1.0 pts] Escriba un problema de valor inicial (PVI) que permita determinar la cantidad de libras de sal que hay presente en el tanque en cualquier instante de tiempo t antes que el tanque quede vacío. Argumente claramente sus afirmaciones. **No resuelva el PVI.**

Solución: Datos del problema

Capacidad del tanque; Cap.	400 gal.
Volumen inicial de solución en el tanque; V_0	160 gal.
Cantidad de sal inicial en el tanque; $A(0)$	40 lb.
Concentración de sal de entrada; c_e	0 lb/gal.
Razón de entrada de solución; r_e	5 gal/min
Razón de salida de solución; r_s	3 gal/min

a) $\frac{40 \text{ lb}}{160 \text{ gal}} = \frac{4}{16}$ lb/gal$= \frac{1}{4}$ lb/gal.

b) El volumen de solución en el tanque a los t minutos es

$$V(t) = V_0 + (r_e - r_s)\, t = 160 + (5-3)\, t = 160 + 2t.$$

Luego $V(t) = \frac{400 \text{ gal}}{2}$=200 gal., si y solo si

$$160 + 2t = 200 \Leftrightarrow 2t = 40 \Leftrightarrow t = 20 \text{ min}.$$

c) Si $A(t)$ representa la cantidad de sal en el tanque duespués de t minutos, entonces se cumple que

$$\frac{dA}{dt} = r_e c_e - r_s c_s = 5 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{A}{V} = -\frac{3}{160+2t} A,$$

o sea que A debe satisfacer la ED

$$\frac{dA}{dt} + \frac{3}{160+2t} A = 0.$$

Luego el problema de valor inicial (PVI) asociado a $A(t)$ es:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{3}{160+2t} A = 0, \quad A(0) = 40.$$

2. [2.4 pts] Considere las siguientes dos ecuaciones diferenciales

$$4(x-1)^2 y'' - 8(x-1)y' + 9y = 0 \tag{1}$$

y

$$4y'' + 2y' + y = x^{1/2}\left(x^2 + 5x + 15\right) \tag{2}$$

en el intervalo $I = (1, \infty)$.

(a) [0.2 pts] Verifique que $w = x^{5/2}$, es solución de una de las dos ecuaciones diferenciales consideradas en I.

Solución: $w = x^{5/2}$, $w' = \frac{5}{2}x^{3/2}$, $w'' = \frac{15}{4}x^{1/2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} 4w'' + 2w' + w &= 4\frac{15}{4}x^{1/2} + 2\frac{5}{2}x^{3/2} + x^{5/2} \\ &= 15x^{1/2} + 5x^{3/2} + x^{5/2} \\ &= x^{1/2}\left(15 + 5x + x^2\right) = x^{1/2}\left(x^2 + 5x + 15\right) \end{aligned}$$

y por consiguiente w es una solución de la ED (2) en I.

(b) [0.2 pts] Verifique que $z = (x-1)^{3/2}$, es solución de una de las dos ecuaciones diferenciales consideradas en I.

Solución: $z = (x-1)^{3/2}$, $z' = \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}$, $z'' = \frac{3}{4}(x-1)^{-1/2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} 4(x-1)^2 z'' - 8(x-1)z' + 9z &= 4(x-1)^2\frac{3}{4}(x-1)^{-1/2} - 8(x-1)\frac{3}{2}(x-1)^{1/2} + 9(x-1)^{3/2} \\ &= 3(x-1)^{3/2} - 12(x-1)^{3/2} + 9(x-1)^{3/2} \\ &= [3 - 12 + 9](x-1)^{3/2} = 0 \text{ para todo } x > 1. \end{aligned}$$

Por tanto z es una solución de la ED (1) en I.

(c) [1.0 pts] Encuentre la solución general de la ED (1).

Solución: Como $y_1 = z = (x-1)^{3/2}$ es una solución de la ED homogéna (1), por el método de reducción de orden se obtiene otra solución y_2 de (1) que es linealmente independiente (l.i.) con y_1 en I:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}dx}{(y_1)^2}, \text{ donde } P(x) = \frac{-8(x-1)}{4(x-1)^2} = \frac{-2}{x-1}.$$

Ahora

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{-2}{x-1}dx} = e^{2\ln(x-1)} = e^{\ln(x-1)^2} = (x-1)^2.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}dx}{(y_1)^2} \\ &= (x-1)^{3/2}\int \frac{(x-1)^2 dx}{\left((x-1)^{3/2}\right)^2} \\ &= (x-1)^{3/2}\int \frac{(x-1)^2 dx}{(x-1)^3} \\ &= (x-1)^{3/2}\int \frac{dx}{x-1} = (x-1)^{3/2}\ln(x-1). \end{aligned}$$

Luego la solución general de la ED (1) es

$$y = c_1 (x-1)^{3/2} + c_2 (x-1)^{3/2} \ln(x),$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

(d) [1.0 pts] Encuentre la solución general de la ED (2).

Solución: Como $w = x^{5/2}$ es una solución particular de la ED no homogéna (2), entonces su solución general es de la forma

$$y = y_h + w,$$

donde y_h es la solución general de la ED homogénea asociada a (2). La ED homogénea asociada es

$$4y'' + 2y' + y = 0,$$

la cual es lineal, de coeficientes constantes y con ecuación auxiliar

$$4m^2 + 2m + 1 = 0.$$

Por fórmula general se tiene que sus raíces son

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{8} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4} i.$$

Como estas raíces son complejas de la forma $m = \alpha \pm \beta i$, con $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}$, entonces

$$y_h = e^{-\frac{1}{4}x} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4} x \right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4} x \right) \right).$$

Así, la solución general de la ED (2) es

$$y = e^{-\frac{1}{4}x} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4} x \right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4} x \right) \right) + x^{5/2},$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

3. [1.2 pts] Se sabe que $C = \left\{3,\ \frac{1}{4}x^4 - 1, 5 - x^4, 2x+1, x+5\right\}$ es un conjunto formado por cinco soluciones de la ecuación diferencial (ED)

$$x^3 y''' - 2x^2 y'' = 0 \ \text{ en } I = (0, \infty)$$

(no verifique esta afirmación). A partir de esta información, obtenga un conjunto fundamental de soluciones para la ED en el intervalo I y escriba la solución general. Argumente claramente sus respuestas.

Solución: Como la ED es de grado tres, del conjunto de soluciones C, solo debemos escoger tres que sean l.i. en I. Sean $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{1}{4}x^4 - 1$, $y_3 = 5 - x^4$, $y_4 = 2x+1$, $y_5 = x+5$. El Wronskiano de y_1, y_2, y_3 es

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{4}x^4 - 1 & 5 - x^4 \\ 0 & x^3 & -4x^3 \\ 0 & 3x^2 & -12x^2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x^3 & -4x^3 \\ 3x^2 & -12x^2 \end{vmatrix} = 3\left(-12x^5 + 12x^5\right) = 0$$

para todo $x \in I = (0, \infty)$. Por lo que estas tres funciones son l.d. en I. Ahora

$$W[y_1, y_2, y_4] = \begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{4}x^4 - 1 & 2x+1 \\ 0 & x^3 & 2 \\ 0 & 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x^3 & 2 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = 3\left(0 \cdot x^3 - 6x^2\right) = -6x^2.$$

Como $W[y_1, y_2, y_4] = -6x^2 \neq 0$ para todo $x > 0$, entonces las soluciones y_1, y_2, y_4 son l.i. en I, y por consiguiente $B = \left\{3, \frac{1}{4}x^4 - 1, 2x + 1\right\}$ es un CFS para la ED en el intervalo I. Así que la solución general de la ED es

$$y = c_1 3 + c_2 \left(\frac{1}{4}x^4 - 1\right) + c_3 (2x + 1)$$

o equivalentemente

$$y = c_1 + c_2 x^4 + c_3 x,$$

ya que

$$c_1 3 + c_2 \left(\frac{1}{4}x^4 - 1\right) + c_3 (2x + 1) = \underbrace{\left(3c_1 - \frac{c_2}{4} + c_3\right)}_{=k_1} + \underbrace{\frac{c_2}{4}}_{=k_2} x^4 + \underbrace{2c_3}_{=k_3} x$$

y c_1, c_2, c_3 son constantes arbitrarias.