Taller Examen final de Cálculo 1 Anec.

Ejercicios sugeridos del texto guia para preparar el examen final.

1 Elasticidad de la demanda.

Definition 1 *Si $p = f(q)$ es una función de demanda diferenciable, la* ***elasticidad puntual de la demanda****, denotada por la letra griega (eta), en (q, p) está dada por*

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q}\left(\frac{dq}{dp}\right)$$

1. En cada uno de los siguientes casos encuentre la elasticidad puntual de la ecuacion de demanda para los valores indicados de p o q y determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria.

   (a) $p = 40 - 2q; \quad q = 5$

   (b) $p = \frac{500}{q+2}; \quad q = 104$

   (c) $p = 150 - e^{q/100}; \quad q = 100$

   (d) $q = \sqrt{500 - p}; \quad p = 400$

   (e) $q = \sqrt{2500 - p^2}; \quad p = 20$

   (f) $q = \frac{1}{2}(p - 100)^2; \quad p = 20$

   (g) $q = p^2 - 50p + 850; \quad p = 20$

2. Para la ecuación de demanda lineal $p = 13 - 0.05q$, verifique que la demanda es elástica cuando $p = 10$, inelástica cuando $p = 3$, y tiene elasticidad unitaria cuando $p = 6,5$.

3. ¿Para que valor o valores de q las siguientes ecuaciones de demanda tienen elasticidad unitaria?

   (a) $p = 36 - 0.25q$

   (b) $p = 300 - q^2$

4. La ecuación de demanda para un producto es $q = 500 - 40p + p^2$ donde p precio por unidad (en dólares) y q es la cantidad de undidades demandadas (en miles). Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 15$. Si este precio de 15 se incrementa en 1%, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

5. La ecuación de la demanda para un cierto producto es $q = \sqrt{2500 - p^2}$ donde p está en dólares. Encuentre la elasticidad de la demanda cuando $p = 30$ y use este valor para calcular el cambio porcentual aproximado de la demanda, si el precio de \$30 baja a 28.50.

6. La ecuación de la demanda de un producto es $q = \sqrt{100 - p}$ donde $0 < p < 100$.

   (a) Encuentre todos los precios que corresponden a la demanda elástica.

   (b) Calcule la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 40$. Use su respuesta para estimar el aumento o la disminución porcental de la demanda cuando e precio el 5% hasta $p = 42$.

2 Trazado de curvas.

Para cada una de las siguientes funciones determine la concavidad y los valores de x en los que se presentan puntos de inflexión.

1. $y = 4x^3 + 12x^2 - 12x$
2. $y = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$
3. $y = 2x^4 - 48x^2 + 7x + 3$
4. $y = \frac{x^4}{2} + \frac{19x^3}{6} - \frac{7x^2}{2} + x + 5$
5. $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$
6. $y = \frac{1}{30}x^6 - \frac{7}{12}x^4 + 5x^2 + 2x - 1$
7. $y = x^6 - 3x^4$
8. $y = 3\left(x^2 - 2\right)^2$

Para cada una de las siguientes funciones determine los intervalos en los que la función crece, decrece, es cóncava hacia arriba, es cóncava hacia abajo; máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión; y realize un bosquejo de la gráfica.

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$
2. $y = x^3 - 25x^2$
3. $y = x^4$
4. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$
5. $y = 4x^3 - 3x^4$
6. $y = -2 + 12x - x^3$
7. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$
8. $y = 5x - x^5$
9. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$
10. $y = 3x^5 - 5x^3$
11. $y = 4x^2 - x^4$
12. $y = x^2\left(x - 1\right)^2$

Para cada una de los siguientes casos realice un bosquejo de la gráfica de una función continua que cumpla con las siguientes condiciones.

1. $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ si $x < 2$ y $f''(x) > 0$ si $x > 2$.
2. $f(4) = 4$, $f'(4) = 0$, $f''(x) < 0$ si $x < 4$ y $f''(x) > 0$ para $x > 4$.
3. $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f''(x) < 0$ para toda x.
4. $f(3) = 4$, tanto $f'(x) > 0$ como $f''(x) > 0$ para $x < 3$ y tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) > 0$ para $x > 3$.

3 Optimización.

1. Un fabricante determina que el costo total c, de producir un articulo está dado por la función de costo $c = 0.05q^2 + 5q + 500$. ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio?.

2. El costo por hora (en dólares) de operar un automóvil está dado por

$$C = 0.12s - 0.0012s^2 + 0.08 \quad para \quad 0 \leq s \leq 60$$

   donde S es la velolcidad en millas por hora. ¿A que velocidad es el costo por hora mínimo?

3. La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = -5q + 30$ ¿A que precio se maximizará el ingreso?

4. Para el producto de un monopolista, la función de demanda es $p = 85 - 0.05q$ y la función de costo es $c = 600 + 35q$. ¿A que nivel de producción se maximiza la utilidad? ¿A qué precio ocurre esto y cuál es la utilidad?.

5. Para un monopolista, el costo por unidad de producir un articulo es de \$3 y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}.$$

   ¿Cuál precio dará la utilidad máxima?

6. Para el producto de un monopolista la ecuación de demanda es

$$p = 42 - 4q$$

   y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 2 + \frac{80}{q}$$

   Encuentre el precio que maximiza la utilidad.

7. Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = \frac{40}{\sqrt{q}}$$

   y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = \frac{1}{3} + \frac{200}{q}$$

   Encuentre el precio y la producción que maximizan la utilidad. Demuestre que a este nivel de producción el ingeso marginal es igual al costo marginal.

8. Un fabricante puede producir cuando mucho 120 unidades de cierto artículo cada año. La ecuación de demanda para ese producto es

$$p = q^2 - 100q + 3200$$

   y la función de costo promedio del fabricante es

$$\bar{c} = \frac{2}{3}q^2 - 40q + \frac{10000}{q}$$

   Determine la producción q que maximiza la utililidad y la utilidad máxima correspondiente.

9. Un fabricante ha determinado que para cierto producto el costo promedio (en dólares por unidad) esta dado por

$$\overline{c} = 2q^2 - 42q + 228 + \frac{210}{q}$$

donde $3 \leq q \leq 12$.

   (a) ¿A qué nivel dentro del intervalo $[3, 12]$ debe fijarse la producción para minimizar el costo total? ¿Cuál es el costo total mínimo?

   (b) Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo $[7, 12]$, ¿qué valor de q minimizaría el costo total?

10. Los costos fijos de la empresa XYZ son de \$1200, los costos combinados de material y mano de obra son de \$2 por unidad y la ecuacion de demanda es

$$p = \frac{100}{\sqrt{q}}$$

¿Que nivel de producción maximizará la utilidad? ¿Cuál es el precio cuando la utilidad es máxima?

11. Una empresa de bienes raices posee 100 apartamentos. Cada uno puede rentarse a \$400 por mes. Sin embargo se observa que por cada incremento de \$10 mensuales en la renta habrá dos apartamentos vacíos, sin posibilidad de rentarlos. ¿Qué renta por departamento maximizará el ingreso mensual?

12. Una empresa de televisión por cable tiene 4800 suscriptores que pagan \$18 mensuales cada uno, y puede conseguir 150 suscriptores más por cada reducción de \$0.50 en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

13. Un fabricante de un producto encuentra que para las primeras 600 unidades que produce y vende, la utilidad es de \$40 por unidad. La utilidad por cada unidad producida más allá de 600 disminuye en \$0.05 por cada unidad adicional producida. Por ejemplo, la utilidad total cuando produce y vende 602 unidades es $600\,(40) + 2\,(39.90)$. ¿Que nivel de producción maximizará la utilidad?

14. (Ver ejemplo 8 Sección 3.6). La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 600 - 2q$ y la función de costo total es

$$c = 0.2q^2 + 28q + 200$$

Encuentre la producción y el precio que maximizan la utilidad y determine la utilidad correspondiente. Si el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al fabricante, ¿cuáles serían entonces la producción y el precio que maximizan la utilidad.

15. Para el producto de un monopolista, la función de costo es $c = 0.004q^3 + 20q + 5000$ y la función de demanda es $p = 450 - 4q$. Encuentre la producción que maximiza la utilidad.

16. (Ejemplo 3 Sección 3.6). La función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = c\,(q) = \frac{q^2}{4} + 3q + 400$$

donde c es el costo total del producir q unidades ¿Para qué nivel de producción será el costo promedio es mínimo?¿Cuál es este mínimo?

17. (Ejemplo 5 Sección 3.6). Una empresa produce y vende anualmente 10.000 unidades de un artículo. Las ventas están distribuidas uniformemente a lo largo del año. La compañia desea determinar el número de unidades que deben fabricarse en cada periodo de producción para minimizar los costos totales anuales de operación y los costos de inventario. Se producen el mismo número de unidades en cada periodo. Este número se denomina **tamaño económico del lote o cantidad económica de pedido**. El costo de producir cada unidad es de \$20 y los costos de inventario (seguro, interés, almacenamiento, etcétera) se estiman iguales al 10% del valor promedio del inventario. Los costos de operacion por periodo de producción son de \$40. Encuentre el tamaño economico del lote.

18. (Ver ejemplo 5 Sección 3.6). Un fabricante debe producir anualmente 1000 unidades de un producto que se vende a una razón uniforme durante un año. El costo de producción de cada unidad es de \$10 y los costos de acarreo (seguro, interés, almacenamiento, etcétera) se estiman iguales al 12,8% delvalor promedio del inventario. Los gastos de operación por periodo de producción son de \$40. Encuentre el tamaño economico del lote.

19. (Ejemplo 8 Sección 13.6). Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio es $\bar{c} = 0.2q + 4 + \dfrac{400}{q}$, donde q es el número de unidades, y p y $\bar{c}$ se expresan en dólares por unidad.

    (a) Determine el nivel de producción que maximiza la utilidad.
    (b) Determine el precio en que ocurre la utilidad máxima.
    (c) Determine la utilidad máxima.
    (d) Si el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al monopolista como medida reguladora, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?

20. (Ejemplo 6 Sección 13.6). La empresa vista TV cable tiene actualmente 100.000 suscriptores que pagan una cuota mensual de \$40. Una encuesta reveló que se tendrían 1000 suscriptores más por cada \$0.25 de disminución en la cuota. ¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían con dicha cuota?