UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 1

8 de agosto de 2023

1. Resolver los siguientes ejercicios del texto guía. Allí se indica primero la Sección y después de los dos puntos los ejercicios sugeridos:

   a) 1.1: 1-36, 47, 48.
   b) 1.2: 1-9, 11, 13, 14, 17-19.
   c) 2.2: 1-30.
   d) 2.3: 1-36.
   e) 2.4: 1-20, 25-38, 42.
   f) 2.5: 1-14, 15-22.
   g) 3.1: 1-10, 13-20.
   h) 3.2: 1, 3.

2. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a) $\sin(y') - y' = x + 3$.
   b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 + \ln x$.
   c) $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right) + x^2y = 0$.
   d) $u_{ttt} + au_{xx} = 0$.

3. Inicialmente un cultivo tiene un número P_0 de bacterias. Una hora después se determina que el número de baterías es cuatro veces la cantidad inicial. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ presentes en el tiempo t, determine: a) el tiempo necesario para que se quintuplique el número de bacterias. b) el número de bacterias que hay 3 horas después, si al inicio hay 500 bacterias.

4. Inicialmente había 200 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 5 horas la masa disminuyó 4 %. Si la razón de decaimiento, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t, determine la cantidad que queda después de 36 horas.

5. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 160° C. Cinco minutos después su temperatura es de 80° C. ¿Cuánto tiempo le tomará al pastel enfriarse hasta la temperatura de 40° C si la temperatura ambiente es de 30° C?

6. Una barra de metal, cuya temperatura inicial era de 40° C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar el doble de su temperatura inicial si se sabe que su temperatura aumentó 3° en 2 segundos? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 96° C?

7. Si la población de una ciudad crece de 1.200.000 habitantes a 1.800.000 habitantes en 4 años, ¿Cuál será la población después de 12 años? Resp/ 4.050.000 habitantes.

8. Una sustancia se enfría de 80° C a 60° C en 20 minutos. Si la temperatura del medio que la rodea es de 20° C, ¿cuál es la temperatura de la sustancia al cabo de 40 minutos? Resp/ 47° C.

9. En 1993 la población mundial había alcanzado 5,5 billones y en ese entonces fue creciendo a razón de 250.000 personas por día. Suponiendo que las tasas de nacimientos y muertes son constantes, ¿En qué momento la población alcanzará los 11 billones de personas? Resp/ Aprox. En 42 años (es decir, en el año 2035). **Nota**: En 1974, el gobierno británico oficialmente declaró que un billón representaba el número 10^9, pasando, por lo tanto, a coincidir con la histórica acepción estadounidense de esa palabra.

10. Un pollo de 4 libras tiene una temperatura inicial de 50° F y se coloca en un horno a 375° F a las 5:00 pm. Después de 75 minutos se observa que la temperatura del pollo $T(t)$ es de 125° F. ¿Cuándo la temperatura del pollo alcanzará los 150° F (término medio)? Resp/ Aprox. En 105 minutos.

11. Una cerveza fría inicialmente a 2° C se calienta a 5° C en 3 min mientras está sentada en una habitación a una temperatura de 20° C. ¿Qué tan caliente estará la cerveza si se deja afuera por 20 minutos?

12. Un vino blanco a temperatura ambiente de 20° C se enfría en hielo (0° C). Si el vino tarda 15 min en enfriarse a 15°C , ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar los 12° C?

13. Usando medidas muy cuidadosas del elemento radiactivo Patakium, un investigador encuentra que el 2 por ciento de su muestra se descompone en 3 horas. Encuentra la vida media de Patakium.

14. Suponga que un estudiante es portador del virus de la gripe y regresa a su aislado campus de 3000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad x de estudiantes infectados sino también a la cantidad de estudiantes no infectados, determine la cantidad de estudiantes infectados después de 7 días si además se observa que después de dos días hay 20 estudiantes infectados. (compare con el Ejemplo 1 de la Section 3.2 del texto guía).

15. Se dice que un ED de orden 1 es de coeficientes homogéneos si al escribirla de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

resulta que la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero, esto es, que $f(tx, ty) = f(x, y)$ para todo $t > 0$. Cualquiera de las siguientes dos sustituciones: $i)$ $y = ux, dy = udx + xdu$ o

ii) $x = vy, dx = vdy + ydv$ en una ED de coeficientes homogéneos la transforma en una ED separable (ver Ejemplo 1 de la Sección 2.5 del texto guía).
Resuelva las siguientes ecuaciones de coeficientes homogéneos.

a) $(3y^2 + 4xy - x^2)dx - (2x^2 + 2xy)dy = 0$, (use la sustición en *i*)).

b) $(x^3 - x^2y - 10xy^2 - 3y^3)dx + (3xy^2 + 7x^2y)dy = 0$, (use la sustición en *i*)).

c) $[4x\cos(y/x) - 3x\sin(y/x) - y]dx + xdy = 0$, (use la sustición en *i*)).

d) $x(2y^4 - x^4)\dfrac{dy}{dx} = y(y^4 - x^4)$, (use la sustición en *i*)).

e) $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy$, (use la sustición en *ii*)).

16. Se dice que un ED de orden 1 es de Bernoulli si se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \tag{2}$$

donde n s una constante real. Note que si n es diferente de 0 y 1, entonces la ED es no lineal. En este caso, demuestre que la sustitución

$$u = y^{1-n}, \quad \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}, \tag{3}$$

transforma la ED (2) en la ED lineal

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)f(x), \tag{4}$$

ver Ejemplo 2 de la Sección 2.5 del texto guía.
Use las indicaciones anteriores para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{6}{x^2-1}y = \dfrac{3(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}y^{2/3}$.

b) $-2\dfrac{dy}{dx} + (\ln x)y = \ln x\left[\dfrac{2}{x} + (\ln x)^2\right]y^3$.

c) $(x+1)^2\sqrt{y}\dfrac{dy}{dx} = xe^{3x/2} - (1-x^2)y\sqrt{y}$.

17. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$.

b) $(2xy + 2y^3)dx + (3x^2 + 10xy^2)dy = 0$.

c) $(y + \cos^2 x)dx + (\frac{3}{2}x + xy + \frac{1}{2}\sin x\cos x)dy = 0$.

1) Demuestre que no son exactas.
2) Halle un factor integrante.
3) Halle la solución general en cada caso.

18. Las siguientes ecuaciones diferenciales tienen un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^a y^b$. Halle los valores exactos de a y b. Halle la solución general.

a) $(2x^2y + y^2)dx + (2x^3 - xy)dy = 0.$

b) $x(4y\,dx + 2x\,dy) + y^3(3y\,dx + 5x\,dy) = 0.$

19. Halle la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial

a) $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$

b) $\cos y\,dx + (1 + e^{-x})\,\sin y\,dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$

c) $ydx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0, \quad y(1) = e.$