UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Ecuaciones Diferenciales

Taller 2

31 de agosto de 2023

1. Resolver los siguientes ejercicios del texto guía. Allí se indica primero la Sección y después de los dos puntos los ejercicios sugeridos:

   a) 3.1: 21-34.

   b) 4.1: 9-11, 15-36.

   c) 4.2: 1-22.

   d) 4.3: 1-14, 29-34.

2. Un tanque con capacidad de 300 galones contiene inicialmente 100 galones de agua pura. Al tanque se vierte salmuera (mezcla de sal y agua) que contiene 2 libras de sal por galón a razón de 4 galones por minuto. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 7 galones por minuto.

   a) Determine la candidad de sal que ingresa al tanque en los primeros tres minutos.

   b) Determine el volumen de solución presente en el tanque a los 5 minutos.

   c) Escriba un problema de valor inicial (PVI) que permita determinar la cantidad de libras de sal que hay presente en el tanque en cualquier instante de tiempo t antes que el tanque quede vacío.

3. Una tanque de 120 galones contiene inicialmente 90 libras de sal disueltas en 90 galones de agua. Salmuera que contiene 2 lib/gal de sal fluye al tanque a una razón de 4 gal/min, y bien mezclada sale del tanque a una razón de 3 gal/min. ¿Cuánta sal hay en el tanque cuando éste está lleno?
   Resp/ $240 - \frac{90^4}{120^3} \approx 202$ **libras.**

4. Un tanque con capacidad de 400 galones contiene inicialmente 160 galones de salmuera (solució salina) en los que se han disuelto 40 libras de sal. Al tanque se vierte agua pura a razón de 5 galones por minuto. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 3 galones por minuto.

   a) Determine la concentración de sal que hay en el tanque al inicio.

   b) Determine el instante en que el tanque está por a mitad de su capacidad.

c) ¿En qué instante se llena el tanque?

d) Escriba un problema de valor inicial (PVI) que permita determinar la cantidad de libras de sal que hay presente en el tanque en cualquier instante de tiempo t antes que se llene.

5. Un tanque contiene inicialmente 300 galones de agua en los que se han disuelto 50 libras de sal. Otra solución salina que tiene $c_{\text{e}}(t) = 2 + \sin(t/4)\ \frac{\text{lib}}{\text{gal}}$ entra al tanque a una velocidad de 3 gal/min y sale a razón 2 gal/min. Halle la ecuación que expresa la cantidad de sal que hay en el tiempo t, $x(t)$.

6. Un tanque contiene 500 galones de una solución de agua salada que contiene 0.05 libras de sal por galón de agua. Agua pura es vertida en el tanque y drena en el fondo del tanque de modo que el volumen permanece constante. ¿A qué razón **R** gal/min debería ser vertida el agua el tanque para tener una concentración de sal **C** de 0.01 lib/gal en una hora?
Resp/ $\mathbf{R} = \frac{25}{3}\ln 5$.

7. Suponga que el Lago Erie tiene volumen de 480 km^3. La razón de entrada del Lago Huron al Lago Erie es de 350 km^3 por año. La razón de salida del Lago Erie al lago Ontario es la misma. En el tiempo ($t = 0$ en años), la concentración del contaminante del Lago Erie-causado por el paso de contaminantes industriales es cinco veces la del lago Huron. Si el flujo de salida está perfectamente mezclado en el agua del lago, ¿cuánto tiempo tomará en reducir la concentración de contaminantes en el Lago Erie a dos veces la del Lago Huron?
Resp/ $t = \frac{480}{350}\ln 4$ **años.**

8. Un tanque está lleno de 100 litros de agua en los que se han disuelto 20 kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene 1 kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto.

   a) ¿Cuál es el volumen después de 20 minutos?

   b) ¿Cuál es el tiempo de vaciado del tanque?

   c) Determine la función que da la cantidad de sal en cada instante.

   d) ¿Cuánta cantidad de sal hay en el tanque después de 20 minutos? ¿Cuál es la concentración en este instante?

   Resp/ a) 80 litros, b) t=100 litros, c) $x(t) = 100 - t - 80(1 - \frac{t}{100})^8$**.**

9. Una batería de 12.5 voltios se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de 1/2 henrios y la resistencia es de 9.5 ohmios. Determine la corriente i después de tres segundos, si la corriente inicial es cero.

10. Se aplica una fuerza electromotriz de 25 voltios a un circuito en serie LR con 0.1 henrios de inductancia y 60 ohmios de resistencia. Determine la corriente $i(t)$, si la correinte inical es cero. Determine la corriente conforme $t \to \infty$.

11. Se aplica una fuerza electromotriz de 500 voltios a un circuito RC, en el que la resistencia es de 1000 ohmios y la capacitancia es de 2×10^{-5} faradios. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor, si $i(0) = 0{,}6$ amperios. Determine la carga y la corriente cuando $t = 0{,}01$ segundos. Además, encuentre la carga conforme $t \to \infty$.

12. Se aplica una fuerza electromotriz $E(t) = 120t$, $0 \leq t \leq 20$, a un circuito en serie LR en el que la inductancia es de 20 henrios y la resistencia es de 2 ohmios. Si el tiempo t está medido en segundos, determine la corriente i después de 10 segundos, si la corriente inical es cero.

13. En los siguientes problemas determine si las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo I que se indica. Forme la solución general de la ecuación diferencial.

    a) $x^2y'' + xy' + y = 0; \quad y_1 = \cos(\ln x),\ y_2 = \sin(\ln x), \quad I = (0, \infty).$

    b) $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad y_1 = x,\ y_2 = x^{-2},\ y_3 = x^{-2}\ln x, \quad I = (0, \infty).$

    c) $-6x^3y''' - 7x^2y'' - xy' + y = 0; \quad y_1 = x,\ y_2 = x^{1/2},\ y_3 = x^{1/3}, \quad I = (0, \infty).$

    d) $y^{(4)} + y'' = 0, \quad y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin x, \quad I = (-\infty, \infty).$

14. En los siguientes ejercicios la función dada $y_1(x)$ es una solución de la ecuación homogénea dada. Use al fórmula de reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.

    a) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0, \quad y_1 = x + 1.$

    b) $x^2y'' - xy' - 3y = 0, \quad y_1(x) = x^3.$

    c) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x.$

    d) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x + 3)\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad y_1(x) = e^x.$

    e) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x.$

    f) $(x^4 - x^2)y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = 0, \quad y_1(x) = x^4.$

    g) $(x^4 + x^2)y'' - (x^3 - x)y' - 4y = 0, \quad y_1(x) = x^2.$

    h) $y'' - (2\tan x)y' + 3y = 0, \quad y_1(x) = \sin x.$

    i) $(x^2 + 1)^2y'' - 4x(x^2 + 1)y' + (6x^2 - 2)y = 0, \quad y_1(x) = x^2 + 1.$

15. En cada caso encuentre la solución general de la ED y resuelva el PVI. Allí k representa una constante real positiva.

    a) $y'' + 4y' + 5y = 0$ con $y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

    b) $2y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0$ y $y'(0) = 1.$

    c) $y'' - 5y' - 14y = 0, \quad y(0) = 2$ y $y'(0) = 1.$

    d) $y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(1) = e^5$ y $y'(0) = 2.$

    e) $3y'' - 7y' - 6y = 0, \quad y(0) = 2$ y $y'(0) = 1/3.$

    f) $4y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2$ y $y'(0) = 1/2.$

    g) $y'' + k^2y = 0, \quad y(0) = 1$ y $y'(0) = 2.$

    h) $y'' - k^2y = 0, \quad y(0) = 1$ y $y'(0) = 2.$