

Departamento de Matemáticas y Estadística
Ecuaciones Diferenciales

Taller 2

21 de marzo de 2024

1. Resolver los siguientes ejercicios del texto guía. Allí se indica primero la Sección y después de los dos puntos los ejercicios sugeridos:

- a) 4.1: 9-11, 15-36.
- b) 4.2: 1-22.
- c) 4.3: 1-36.
- d) 4.6: 1-28, 32.
- e) 5.1: 1-7, 21-45, 49-62.

2. En los siguientes problemas determine si las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo I que se indica. Forme la solución general de la ecuación diferencial.

- a) $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y_1 = \cos(\ln x)$, $y_2 = \sin(\ln x)$, $I = (0, \infty)$.
- b) $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = x^{-2}$, $y_3 = x^{-2} \ln x$, $I = (0, \infty)$.
- c) $-6x^3y''' - 7x^2y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = x^{1/2}$, $y_3 = x^{1/3}$, $I = (0, \infty)$.
- d) $y^{(4)} + y'' = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$, $I = (-\infty, \infty)$.

3. En los siguientes ejercicios la función dada $y_1(x)$ es una solución de la ecuación homogénea dada. Use al fórmula de reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.

- a) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$, $y_1 = x + 1$.
- b) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$, $y_1(x) = x^3$.
- c) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$.
- d) $x \frac{d^2y}{dx^2} - (x + 3) \frac{dy}{dx} + 3y = 0$, $y_1(x) = e^x$.
- e) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$.
- f) $(x^4 - x^2)y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = 0$, $y_1(x) = x^4$.
- g) $(x^4 + x^2)y'' - (x^3 - x)y' - 4y = 0$, $y_1(x) = x^2$.

h) $y'' - (2 \tan x)y' + 3y = 0$, $y_1(x) = \sin x$.

i) $(x^2 + 1)^2 y'' - 4x(x^2 + 1)y' + (6x^2 - 2)y = 0$, $y_1(x) = x^2 + 1$.

4. En cada caso encuentre la solución general de la ED y resuelva el PVI. Allí k representa una constante real positiva.

a) $y'' + 4y' + 5y = 0$ con $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

b) $2y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$.

c) $y'' - 5y' - 14y = 0$, $y(0) = 2$ y $y'(0) = 1$.

d) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(1) = e^5$ y $y'(0) = 2$.

e) $3y'' - 7y' - 6y = 0$, $y(0) = 2$ y $y'(0) = 1/3$.

f) $4y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 2$ y $y'(0) = 1/2$.

g) $y'' + k^2 y = 0$, $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$.

h) $y'' - k^2 y = 0$, $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$.

5. Halle la solución general de

a) $2y''' - y'' + 18y' - 9y = 0$.

b) $y''' - 2y'' - 2y' - 3y = 0$.

c) $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

d) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$.

e) $y^{(4)} - 16y = 0$.

f) $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$. (**Resp/** $y = e^{-x}[(c_1 + c_2x) \cos x + (c_3 + c_4x) \sin x]$).

g) $y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0$.

6. Halle la solución de las siguientes ecuaciones usando el método de variación de parámetros.

a) $y'' + 4y = \sec 2x$.

b) $y'' - y = \sec^3 x - \sec x$.

c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$

d) $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = \ln x$.

e) $y''' + y' = \tan x$

7. Resuelva las ecuaciones de Cauchy-Euler.

a) $4x^2 y'' + 4xy' - y = 0$.

b) $2x^2 y'' + 5xy' + y = x^2 - x$.

c) $x^2 y'' + xy' - y = \frac{1}{x+1}$.

8. Una masa que pesa 24 libras, unida al extremo de un resorte, lo alarga 4 pulgadas. Al inicio, la masa se libera desde el reposo en un punto 3 pulgadas arriba de la posición de equilibrio. Si $x(t)$ representa la posición de la masa, respecto a la posición de equilibrio, en el instante de tiempo t , entonces:

- a) formule el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.
 b) Encuentre la ecuación del movimiento $x(t)$.
Resp/ $x(t) = -\frac{1}{4} \cos 4\sqrt{6}t$.
9. Después que una masa de 10 libras se sujeta a un resorte de 5 pies, éste llega a medir 7 pies. Se retira la masa y se sustituye con una de 8 libras. Luego se coloca al sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a la velocidad instantánea. Si $w(t)$ representa la posición de la masa, respecto a la posición de equilibrio, en el instante de tiempo t , entonces:
- a) formule el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa, si esta se libera inicialmente desde el reposo de un punto situado a 0.5 pies arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1 pies/s.
 b) Encuentre la ecuación del movimiento $w(t)$.
Resp/ $w(t) = e^{-2t}(\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t)$.
10. Una masa que pesa 16 libras alarga $\frac{8}{3}$ pies un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 0.5 veces la velocidad instantánea. Además, sobre la masa actúa una fuerza externa igual a $f(t) = 10 \cos 3t$. Si $y(t)$ representa la posición de la masa, respecto a la posición de equilibrio, en el instante de tiempo t , entonces:
- a) formule el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.
 b) Encuentre la ecuación del movimiento $y(t)$.
Resp/ $y(t) = e^{-t/2} \left[-\frac{4}{3} \cos(\frac{\sqrt{47}}{2}t) - \frac{64}{3\sqrt{47}} \sin(\frac{\sqrt{47}}{2}t) \right]$.
11. Una masa de 1 slug está unida a un resorte cuya constante es de 5 lib/pie. Al inicio la masa se libera 1 pie abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 5 pies/s y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento de igual a 2 veces la velocidad instantánea. Además, sobre la masa actúa una fuerza externa igual a $f(t) = 12 \cos 2t + 3 \sin 2t$. Si $s(t)$ representa la posición de la masa, respecto a la posición de equilibrio, en el instante de tiempo t , entonces:
- a) formule el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.
 b) Encuentre la ecuación del movimiento $s(t)$.
Resp/ $s(t) = e^{-t} \cos 2t + 3 \sin 2t$.
12. Se aplica una fuerza electromotriz de $E(t)$ voltios a un circuito RLC en serie con R ohmios de resistencia, L henrios de inductancia y C faradios de capacitancia. Determinar la carga $q(t)$ en el capacitor y la corriente $i(t)$ si:
- i) $q(0) = 0, i(0) = 0, L = 1, R = 20, C = 0,002$ y $E(t) = 12$.
 ii) $q(0) = 0, i(0) = 0, L = \frac{1}{2}, R = 3, C = \frac{1}{4}$ y $E(t) = 5 \cos(2t) - 2e^{-2t}$.
 i) $q(0) = 5, i(0) = 0, L = 0,05, R = 2, C = 0,001$ y $E(t) = 0$. Determine la primera vez en que la carga del capacitor es igual a cero.
13. Encuentre la corriente transitoria y de estado estable en un circuito serie RLC cuando $L = 1/2, R = 20, C = 0,001$ y $E(t) = 200 \cos(20t)$.