Solución de P3EDO2023-30, Fila A

① Encuentre la solución general de $y^{(5)}+3y^{(4)}+y^{(3)}-5y''=0$.

solución: La ecuación auxiliar es : $m^5+3m^4+m^3-5m^2=0$.

$\Rightarrow m^2(m^3+3m^2+m-5)=0$

$\Rightarrow m^2=0$ ó $m^3+3m^2+m-5=0$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & 1 & -5 & \underline{1} \to m_3=1 \\ & 1 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & 4 & 5 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Downarrow$

$m_1=m_2=0$.

$\hookrightarrow m^2+4m+5=0 \Rightarrow m=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(5)}}{2(1)}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$

$=\frac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i \Rightarrow \alpha=-2,$

$\beta=1.$

La solución general de la ED es:

$y=c_1e^{0x}+c_2xe^{0x}+c_3e^{1x}+e^{-2x}(c_4\cos(x)+c_5\sin(x))$,

es decir,

$$\boxed{y=c_1+c_2x+c_3e^{x}+e^{-2x}(c_4\cos(x)+c_5\sin(x)).}$$

② solución

a) $W=64$ libras (peso), $s=\frac{32}{3}$ pies (alargamiento o elongación)

$K=\frac{W}{s}=\frac{64}{\frac{32}{3}}=3\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{64}}}{\underset{1}{\cancel{32}}}=3\cdot 2=6$ (constante del resorte)

$m=\frac{W}{g}=\frac{64}{32}=2$ masa

$\beta=7$ (ya que fuerza de amortiguamientos es 7 veces la velocidad instantánea).

$F(t)=6e^{-3t}$ es la fuerza externa.

$s(0)=4$ posición inicial, $s'(0)=0$ velocidad inicial.

b) $$\begin{cases} 2s''+7s'+6s=6e^{-3t}, \\ s(0)=4, \\ s'(0)=0. \end{cases}$$

c) Se usará el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular y_p de la ED

$$6y''+21y'+18y=9e^{-2t},$$

sabiendo que $y_1=2e^{-3/2t}$, $y_2=e^{-2t}$ forman un CFS de la ED homogénea asociada.

$W=\begin{vmatrix} 2e^{-3/2t} & e^{-2t} \\ -3e^{-3/2t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix}=-4e^{-7/2t}+3e^{-7/2t}=-e^{-7/2t}.$

Nota: $f(t)=\frac{9e^{-2t}}{6}=\frac{3}{2}e^{-2t}$

$W_1=\begin{vmatrix} 0 & e^{-2t} \\ f(t) & -2e^{-2t} \end{vmatrix}=0-f(t)e^{-2t}=-\frac{3}{2}e^{-2t}e^{-2t}$

$=-\frac{3}{2}e^{-4t}.$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2e^{-\frac{3}{2}t} & 0 \\ -3e^{-\frac{3}{2}t} & f(t) \end{vmatrix} = 2e^{-\frac{3}{2}t} f(t) = 2e^{-\frac{3}{2}t}\,\frac{3}{2}e^{-2t} = 3e^{-\frac{7}{2}t}.$$

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W}\,dt = \int \frac{-\frac{3}{2}e^{-4t}}{-e^{-\frac{7}{2}t}}\,dt = \frac{3}{2}\int e^{-4t+\frac{7}{2}t}\,dt = \frac{3}{2}\int e^{-\frac{1}{2}t}\,dt = \frac{3}{\cancel{2}}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\frac{-1}{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow u_1 = -3e^{-\frac{1}{2}t}.$$

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W}\,dt = \int \frac{3\cancel{e^{-\frac{7}{2}t}}}{-\cancel{e^{-\frac{7}{2}t}}}\,dt = -3\int dt = -3t.$$

$$\Rightarrow u_2 = -3t.$$

Luego, una solución particular de la ED no homogénea es

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = -3e^{-\frac{1}{2}t}\cdot 2e^{-\frac{3}{2}t} - 3te^{-2t} = -6e^{-2t} - 3te^{-2t}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p = -6e^{-2t} - 3te^{-2t}.}$$

La solución general de la ED no homogénea es:

$$y = y_p + y_h = -6e^{-2t} - 3te^{-2t} + c_1\cdot 2e^{-\frac{3}{2}t} + c_2e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -6e^{-2t} - 3te^{-2t} + c_1e^{-\frac{3}{2}t} + c_2e^{-2t},}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Equivalentemente:

$$y = -3te^{-2t} + c_1e^{-\frac{3}{2}t} + (c_2-6)e^{-2t},$$

pero, como c_2 es una constante arbitraria, también se puede escribir:

$$\boxed{y = -3te^{-2t} + c_1e^{-\frac{3}{2}t} + c_2e^{-2t}.}$$