Solución de P1EDO2023-30, Fila A, G02

I

(1) $\frac{dy}{dx} - 4xy^3 = 0, \quad y(-1) = 1/2.$

$\frac{dy}{dx} = 4xy^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = 4x\,dx \Rightarrow \int y^{-3}dy = \int 4x\,dx \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = 4\frac{x^2}{2} + c$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2} = 2x^2 + c.$

Usando $x=-1, y=1/2$: $-\frac{1}{2}\frac{1}{(1/2)^2} = 2(-1)^2 + c \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}} = 2 + c$

$\Rightarrow -2 = 2 + c \Rightarrow c = -4.$

$\Rightarrow$ La solución del PVI es: $-\frac{1}{2}y^{-2} = 2x^2 - 4$ o equivalentemente

$2x^2 + \frac{1}{2}y^{-2} = 4.$

(2) $x\frac{dy}{dx} - 3y = 6x^5e^{2x}, \quad x > 0.$

$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = 6x^4e^{2x}, \quad p(x) = -\frac{3}{x}, \quad \mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln(x)} = e^{\ln(x^{-3})} = x^{-3}$

$\mu(x) = x^{-3}$

$x^{-3}y = \int 6x^4e^{2x}x^{-3}dx \Rightarrow x^{-3}y = 6\int xe^{2x}dx + c$

$x^{-3}y = 6\left[x\frac{1}{2}e^{2x} - \int\frac{1}{2}e^{2x}dx\right] + c = 3xe^{2x} - \frac{3}{2}e^{2x} + c$

$y = 3x^4e^{2x} - \frac{3}{2}x^3e^{2x} + cx^3.$

(3) $3x^2y\,dx + (2y + 4x^3)dy = 0, \quad y > 0.$

$M = 3x^2y, \quad N = 2y + 4x^3$

$M_y = 3x^2, \quad N_x = 12x^2 \Rightarrow$ La ED no es exacta ($M_y \neq N_x$).

$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{12x^2 - 3x^2}{3x^2y} = \frac{9\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}y} = \frac{3}{y}. \Rightarrow \mu(y) = e^{\int\frac{3}{y}dy} = e^{3\ln(y)} = e^{\ln(y^3)} = y^3$

$\Rightarrow \mu(y) = y^3$ es un factor integrante para la ED.

Multiplicando la ED por $\mu = y^3$: $\boxed{3x^2y^4dx + (2y^4 + 4x^3y^3)dy = 0}$ (#)

$\bar{M} = 3x^2y^4, \quad \bar{N} = 2y^4 + 4x^3y^3, \quad \bar{M}_y = 12x^2y^3, \quad \bar{N}_x = 12x^2y^3 \Rightarrow \bar{M}_y = \bar{N}_x$

$\Rightarrow$ La ED (#) es exacta.

Buscamos $f(x,y)$: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \bar{M} = 3x^2y^4}$ (1) y $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \bar{N} = 2y^4 + 4x^3y^3.}$ (2)

(1) $\Rightarrow f(x,y) = \int 3x^2y^4dx + g(y) = 3\frac{x^3}{3}y^4 + g(y) \Rightarrow \boxed{f(x,y) = x^3y^4 + g(y)}$ (3)

(3) $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{4x^3y^3} + g'(y) \overset{(2)}{=} 2y^4 + \cancel{4x^3y^3} \Rightarrow g'(y) = 2y^4 \Rightarrow g(y) = \int 2y^4dy = \frac{2}{5}y^5$

$\Rightarrow g(y) = \frac{2}{5}y^5 \overset{(3)}{\Rightarrow} f(x,y) = x^3y^4 + \frac{2}{5}y^5 \Rightarrow$ La solución general de la ED es:

$\boxed{x^3y^4 + \frac{2}{5}y^5 = C.}$

④ Datos del problema:

$R(t)$ = temperatura de la barra después de t segundos.

$R(0) = 35°C$, $R(3) = 40°C$, $T_m = 100°C$ (temperatura del medio en que se encuentra la barra metálica).

a) $\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = k(R-100) \\ R(0) = 35. \end{cases}$ (PVI)

b) $R(3) = 40$.