Solución del segundo parcial de ED. Fila A

[redacted]

① a) Capacidad = 800 gal, $V_0 = 600$ gal. concentración inicial $\frac{1}{10}$ lb/gal, $r_e = 3$ gal/min, $C_e = 0$ lb/gal (agua pura), $r_s = 6$ gal/min.

$Y(0) = 600$ gal. salmuera $\times \frac{1}{10} \frac{\text{lb sal}}{\text{gal}} = 60$ lib. de sal,

b) ED: $\frac{dY}{dt} = 3 \cdot 0 - 6 \cdot \frac{Y}{V}$, donde $V = V_0 + (r_e - r_s)t$
$= 600 + (3-6)t$
$= 600 - 3t$ es el volumen de solución en el tanque en el instante t.

$$\Rightarrow \frac{dY}{dt} = -\frac{6}{600-3t} Y \Rightarrow \frac{dY}{dt} + \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}(200-t)} Y = 0.$$

Luego el PVI solicitado es

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dY}{dt} + \frac{2}{200-t} Y = 0, \\ Y(0) = 60. \end{cases}}$$

② $E(t) = 300$ voltios, $R = 100$ ohmios, $C = 10^{-3}$ faradios.

ED: $Ri + \frac{1}{C} q = E$, donde $i = \frac{dq}{dt}$.

Después de sustituir los datos del problema e i, se tiene que la ecuación diferencial con incognita q es:

$$100 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{10^{-3}} q = 300, \text{ o equivalentemente } \boxed{\frac{dq}{dt} + 10q = 3.}$$

③ $y'' + 3y' - 10y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.

La ecuación auxiliar asociada a la ED es

$m^2 + 3m - 10 = 0 \Rightarrow (m+5)(m-2) = 0 \Rightarrow m+5 = 0 \lor m-2 = 0$

$m_1 = -5$, $m_2 = 2$ son las raíces de la ec. aux.

Luego, $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x}$ es la solución general de la ED.

Derivando respecto a x, resulta que $y' = -5c_1 e^{-5x} + 2c_2 e^{2x}$.

Ahora, se usarán las condiciones iniciales:

$x=0, y=4$: $c_1 e^{-5(0)} + c_2 e^{2(0)} = 4 \overset{e^0=1}{\Longrightarrow} c_1 + c_2 = 4 \overset{(\times 5)}{\Longrightarrow} 5c_1 + 5c_2 = 20$

$x=0, y'=1$: $-5c_1 e^{-5(0)} + 2c_2 e^{2(0)} = 1 \overset{e^0=1}{\Longrightarrow} -5c_1 + 2c_2 = 1 \Rightarrow \underline{-5c_1 + 2c_2 = 1}$

$7c_2 = 21$

$\Rightarrow c_2 = 21/7 = 3 \Rightarrow c_2 = 3$. $c_1 = 4 - c_2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$.

En consecuencia, la solución del problema de valores iniciales es

$$y = e^{-5x} + 3e^{2x}.$$

(4) $x^2y'' - 3xy' - 32y = 0$.

a) Se da la información de que $y_1 = \frac{1}{4}x^{-4}$ es una solución de la ED en el intervalo $I = (0, \infty)$. Usando el método de reducción de orden se tiene que

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1)^2} dx$$

(donde $P(x) = -\frac{3x}{x^2} = -\frac{3}{x}$, ya que la forma estándar de la ED es
$y'' - \frac{3}{x}y - \frac{32}{x^2}y = 0$).

$$= \frac{1}{4}x^{-4} \int \frac{e^{-\int -\frac{3}{x}dx}}{(\frac{1}{4}x^{-4})^2} dx$$

$$= \frac{1}{4}x^{-4} \int \frac{e^{3\ln x}}{\frac{1}{16}x^{-8}} dx = \frac{1}{4}x^{-4} \int \frac{16e^{\ln(x^3)}}{x^{-8}} dx$$

$$= 4x^{-4} \int \frac{x^3}{x^{-8}} dx = 4x^{-4} \int x^{11} dx = 4x^{-4} \cdot \frac{1}{12}x^{12} = \frac{1}{3}x^8$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}x^8.$$

b) La solución general de la ED es:

$$y = c_1 \frac{1}{4}x^{-4} + c_2 \frac{1}{3}x^8,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Equivalentemente:

$$y = c_1 x^{-4} + c_2 x^8.$$

(5) Se sabe que $A = \{3, 1-2x, x^5+1\}$ es un conjunto de soluciones para la ED $x^3y''' - 3x^2y'' = 0$ en $I = (0, \infty)$.

Ahora, el Wronskiano de estas soluciones es:

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 1-2x & x^5+1 \\ 0 & -2 & 5x^4 \\ 0 & 0 & 20x^3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 5x^4 \\ 0 & 20x^3 \end{vmatrix} = 3(-40x^3 - 0) = -120x^3$$

$\Rightarrow W = -120x^3 \neq 0$ para todo $x > 0$.

$\Rightarrow y_1 = 3, y_2 = 1-2x, y_3 = x^5+1$ son linealmente independientes en I.

En consecuencia, al ser y_1, y_2, y_3 tres soluciones linealmente independientes, entonces A es un CFS para la ED dada.

La solución general de la ED es

$$y = c_1 \cdot 3 + c_2(1-2x) + c_3(x^5+1),$$

o equivalentemente

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^5,$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.