UNIVERSIDAD DEL NORTE
Departamento de Matemáticas y Estadística

# Departamento de Matemáticas y Estadística
# Ecuaciones Diferenciales

**Taller 2**

17 de marzo de 2025

1. Resolver los siguientes ejercicios del texto guía. Allí se indica primero la Sección y después de los dos puntos los ejercicios sugeridos:

   *a*) 4.1: 9-11, 15-36.
   *b*) 4.2: 1-22.
   *c*) 4.3: 1-36.
   *d*) 4.6: 1-28, 32.
   *e*) 5.1: 1-7, 21-45, 49-62.

2. En los siguientes problemas determine si las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo I que se indica. Forme la solución general de la ecuación diferencial.

   *a*) $x^2y'' + xy' + y = 0; \quad y_1 = \cos(\ln x),\ y_2 = \sin(\ln x), \quad I = (0, \infty).$
   *b*) $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad y_1 = x,\ y_2 = x^{-2},\ y_3 = x^{-2}\ln x, \quad I = (0, \infty).$
   *c*) $-6x^3y''' - 7x^2y'' - xy' + y = 0; \quad y_1 = x,\ y_2 = x^{1/2},\ y_3 = x^{1/3}, \quad I = (0, \infty).$
   *d*) $y^{(4)} + y'' = 0, \quad y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin x, \quad I = (-\infty, \infty).$

3. En los siguientes ejercicios la función dada $y_1(x)$ es una solución de la ecuación homogénea dada. Use al fórmula de reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.

   *a*) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0, \quad y_1 = x + 1.$
   *b*) $x^2y'' - xy' - 3y = 0, \quad y_1(x) = x^3.$
   *c*) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x.$
   *d*) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x + 3)\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad y_1(x) = e^x.$
   *e*) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x.$
   *f*) $(x^4 - x^2)y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = 0, \quad y_1(x) = x^4.$

*g*) $(x^4+x^2)y''-(x^3-x)y'-4y=0, \quad y_1(x)=x^2.$

*h*) $y''-(2\tan x)y'+3y=0, \quad y_1(x)=\sin x.$

*i*) $(x^2+1)^2y''-4x(x^2+1)y'+(6x^2-2)y=0, \quad y_1(x)=x^2+1.$

4. En cada caso encuentre la solución general de la ED y resuelva el PVI. Allí $k$ representa una constante real positiva.

   *a*) $y''+4y'+5y=0$ con $y(0)=2, \; y'(0)=0.$

   *b*) $2y''-4y'+3y=0, \quad y(0)=0$ y $y'(0)=1.$

   *c*) $y''-5y'-14y=0, \quad y(0)=2$ y $y'(0)=1.$

   *d*) $y''-10y'+25y=0, \quad y(1)=e^5$ y $y'(0)=2.$

   *e*) $3y''-7y'-6y=0, \quad y(0)=2$ y $y'(0)=1/3.$

   *f*) $4y''-10y'+25y=0, \quad y(0)=2$ y $y'(0)=1/2.$

   *g*) $y''+k^2y=0, \quad y(0)=1$ y $y'(0)=2.$

   *h*) $y''-k^2y=0, \quad y(0)=1$ y $y'(0)=2.$

5. Halle la solución general de

   *a*) $2y'''-y''+18y'-9y=0.$

   *b*) $y'''-2y''-2y'-3y=0.$

   *c*) $y'''-2y''-3y'=0.$

   *d*) $y^{(4)}+4y'''+6y''+4y'+y=0.$

   *e*) $y^{(4)}-16y=0.$

   *f*) $y^{(4)}+4y'''+8y''+8y'+4y=0.$ (**Resp/** $y=e^{-x}[(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x]$).

   *g*) $y^{(6)}+8y^{(4)}+16y''=0.$

6. Halle la solución de las siguientes ecuaciones usando el método de variación de parámetros.

   *a*) $y''+4y=\sec 2x.$

   *b*) $y''-y=\sec^3 x-\sec x.$

   *c*) $y'''-2y''-y'+2y=e^{4x}$

   *d*) $y'''-7y''+14y'-8y=\ln x.$

   *e*) $y'''+y'=\tan x$

7. Resuelva las ecuaciones de Cauchy-Euler.

   *a*) $4x^2y''+4xy'-y=0.$

   *b*) $2x^2y''+5xy'+y=x^2-x.$

   *c*) $x^2y''+xy'-y=\dfrac{1}{x+1}.$

8. Una masa que pesa 24 libras, unida al extremo de un resorte, lo alarga 4 pulgadas. Al inicio, la masa se libera desde el reposo en un punto 3 pulgadas arriba de la posición de equilibrio. Si $x(t)$ representa la posición de la masa, respecto a la posición de equilibrio, en el instante de tiempo $t$, entonces:

*a*) formule el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

*b*) Encuentre la ecuación del movimiento $x(t)$.
**Resp/** $x(t) = -\frac{1}{4}\cos 4\sqrt{6}t$.

9. Después que una masa de 10 libras se sujeta a un resorte de 5 pies, éste llega a medir 7 pies. Se retira la masa y se sustituye con una de 8 libras. Luego se coloca al sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a la velocidad instantánea. Si $w(t)$ representa la posición de la masa, respecto a la posición de equilibrio, en el instante de tiempo $t$, entonces:

   *a*) formule el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa, si esta se libera inicialmente desde el reposo de un punto situado a 0.5 pies arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1 pies/s.

   *b*) Encuentre la ecuación del movimiento $w(t)$.
   **Resp/** $w(t) = e^{-2t}(\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)$.

10. Una masa que pesa 16 libras alarga 8/3 pies un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 0.5 veces la velocidad instantánea. Además, sobre la masa actúa una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos 3t$. Si $y(t)$ representa la posición de la masa, respecto a la posición de equilibrio, en el instante de tiempo $t$, entonces:

    *a*) formule el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

    *b*) Encuentre la ecuación del movimiento $y(t)$.
    **Resp/** $y(t) = e^{-t/2}\left[-\frac{4}{3}\cos(\frac{\sqrt{47}}{2}t) - \frac{64}{3\sqrt{47}}\sin(\frac{\sqrt{47}}{2}t)\right]$.

11. Una masa de 1 slug está unida a un resorte cuya constante es de 5 lib/pie. Al inicio la masa se libera 1 pie abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 5 pies/s y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento de igual a 2 veces la velocidad instantánea. Además, sobre la masa actúa una fuerza externa igual a $f(t) = 12\cos 2t + 3\sin 2t$. Si $s(t)$ representa la posición de la masa, respecto a la posición de equilibrio, en el instante de tiempo $t$, entonces:

    *a*) formule el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

    *b*) Encuentre la ecuación del movimiento $s(t)$.
    **Resp/** $s(t) = e^{-t}\cos 2t + 3\sin 2t$.

12. Se aplica una fuerza electromotriz de $E(t)$ voltios a un circuito $RLC$ en serie con $R$ ohmios de resistencia, $L$ henrios de inductancia y $C$ faradios de capacitancia. Determinar la carga $q(t)$ en el capacitor y la corriente $i(t)$ si:

    *i*) $q(0) = 0$, $i(0) = 0$, $L = 1$, $R = 20$, $C = 0{,}002$ y $E(t) = 12$.

    *ii*) $q(0) = 0$, $i(0) = 0$, $L = \frac{1}{2}$, $R = 3$, $C = \frac{1}{4}$ y $E(t) = 5\cos(2t) - 2e^{-2t}$.

    *i*) $q(0) = 5$, $i(0) = 0$, $L = 0{,}05$, $R = 2$, $C = 0{,}001$ y $E(t) = 0$. Determine la primera vez en que la carga del capacitor es igual a cero.

13. Encuentre la corriente transitoria y de estado estable en un circuito serie $RLC$ cuando $L = 1/2$, $R = 20$, $C = 0,001$ y $E(t) = 200\cos(20t)$.