

Universidad del Norte
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Taller de Cálculo II
Examen Final
Profesor Coordinador: Javier de la Cruz
Periodo 30 de 2025

Nombre: _____ Fecha: _____

Observación: Recuerden:

1. El texto guía es: Cálculo, Trascendentes Tempranas, R. Smith, R. Minton, Z. Rahfi, Quinta edición, 2019, MacGraw Hill.
2. Los ejercicios señalados con asterisco tiene un nivel de complejidad superior.

Notación: En taller C denota convergente y D denota divergente.

Sucesiones

1. Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, calcule el límite.

(a) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$	Rta: 5	(e) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$	Rta: e^2
(b) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$	Rta: 0	(f) $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$	Rta: 0
(c) $\left\{ \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} \right\}$	Rta: 0	(g) $a_n = \frac{e^n}{n}$	Rta: D
(d) $\left\{ \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n}-1} \right\}$	Rta: 0	(h) $a_n = \frac{3-2n^2}{n^2-1}$	Rta: -2

2. Dada la sucesión $\left\{ \frac{1-(1-1/n)^a}{1-(1-1/n)^b} \right\}$, donde a y b son constantes con $b \neq 0$, determine si la sucesión converge y halle su límite. **Rta:** $\frac{a}{b}$.

Series numéricas

Series telescópicas y geométricas

3. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, calcular su suma.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ **Rta:** 2
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$ **Rta:** 3
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$ **Rta:** D
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{2^n}$ **Rta:** D
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}$ **Rta:** $\frac{2}{3}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^{n-1}}$ **Rta:** $\frac{3}{5}$
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ **Rta:** 1
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{n-1}}$ **Rta:** $\frac{2}{3}$
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n}$ **Rta:** $\frac{1}{7}$

4. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, calcular su suma.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ **Rta:** $\frac{3}{4}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}$ **Rta:** 1
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ **Rta:** $\frac{1}{2}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ **Rta:** $\frac{1}{2}$
- (e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ **Rta:** $\frac{1}{2}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ **Rta:** C
- (g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ **Rta:** C
- (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n}$
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ **Rta:** D
- (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ **Rta:** 1
- (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$ **Rta:** $5/2$
- (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$ **Rta:** 1
- (m) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ **Rta:** C
- (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{(n-1)(n-2)}$ **Rta:** $\frac{3}{2}$
- (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ **Rta:** 1
- (p) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^n}$ **Rta:** $\frac{5}{2}$
- (q) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ **Rta:** D
- (r) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$ **Rta:** D
- (s) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{3^k}$ **Rta:** $\frac{5}{2}$
- (t) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$ **Rta:** D
- (u) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ **Rta:** $\frac{e}{e-1}$
- (v) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$ **Rta:** $e - 1$

5. Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ **Rta:** $-3 < x < 3$; $\frac{x}{3-x}$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$ **Rta:** $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{1-4x}$
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$ **Rta:** $x \in \mathbb{R}$; $\frac{2}{2-\cos x}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n 4$ **Rta:** $3 < x < 5$; $\frac{4-x}{x-5}$
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$ **Rta:** $-5 < x < -1$; $\frac{-2}{x+1}$
6. ¿Cuál es el valor de c si $\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2$? **Rta:** $c = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
7. Encuentre el valor de c tal que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$. **Rta:** $c = \ln \frac{9}{10}$
8. Escriba los siguientes decimales periódicos como cociente de dos enteros
- (a) $0,222222\dots$
- (b) $3,393939\dots$
- (c) $1,257257257\dots$
- (d) $2,352235223522\dots$
9. Una pelota se deja caer de una altura de 6 pies y empieza a rebotar. La altura de cada salto es de tres cuartos la altura del salto anterior. Encuentre la distancia vertical total recorrida por la pelota. **Rta:** 42 pies
10. Un objeto rueda 10 metros en el primer segundo. En cada segundo en que dura moviéndose rueda un 80 % de lo que rodó en el segundo anterior debido al fricción. ¿cuán lejos rodará el objeto? **Rta:** 50 metros
11. Texto guía Página 182 Ejercicios: 11,13,15,17,19.

Criterio del término n -ésimo para divergencia y operaciones con series

12. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, calcular su suma.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{3}{2^n} \right)$ **Rta:** D (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^n} + \frac{5}{n(n+1)} \right)$ **Rta:** C
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^n + e^{-n})$ **Rta:** D (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{(-5)^n} + \frac{7}{(n+1)(n+2)} \right)$ **Rta:** C
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n)$ **Rta:** D (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^n}{(-2)^n} + \frac{2}{(n+2)(n+3)} \right)$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+2}$ **Rta:** D (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{(-2)^{n+1}} + \ln \frac{n}{(n+1)} \right)$ **Rta:** D

13. Determine el valor de verdad de la afirmación dada o escoja la respuesta correcta

- (a) La suma de una serie convergente con una serie divergente es convergente.
- (b) Si la suma de dos series es convergente, entonces cada una de ellas es convergente.
- (c) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ satisface las condiciones del criterio de la integral y la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge a s , entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge también a s .
- (d) Si dos series difieren en un número finito de términos, entonces o ambas convergen o ambas divergen.
- (e) Si una serie es convergente, entonces es absolutamente convergente.
- (f) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ es divergente.
- (g) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series de términos positivos, $a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.
 - $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.
 - $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ puede ser convergente o divergente.
- (h) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series de términos positivos, $a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

- ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

Criterio de la integral

14. Usando el criterio de la integral determine si la serie es convergente o divergente.

- | | | | |
|---|---------------|---|---------------|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ | Rta: D | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ | Rta: C |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ | Rta: C | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ | Rta: C |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$ | Rta: C | (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ | Rta: D |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$ | Rta: C | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ | Rta: C |
| (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$ | Rta: D | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$ | Rta: C |
| (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-2\sqrt{n}}{n^3}$ | Rta: C | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+2)}$ | Rta: D |

15. Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente.

- | | | | |
|---|---------------------|--------------------------------------|----------------------|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ | Rta: $p > 1$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+1)^p$ | Rta: $p < -1$ |
| (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ | Rta: $p > 1$ | | |

16. Encuentre todos los valores de c para los que converge la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad \textbf{Rta} : c \leq 1$$

17. (*) Para un cierto valor real k , la serie dada es convergente. Determinar k .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n^2+2k} - \frac{k}{n+1} \right). \quad \textbf{Rta} : k = \frac{1}{2}$$

18. (*) Para un cierto valor real k , la serie dada es convergente. Determinar k .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+4} - \frac{k}{3n+1} \right). \quad \textbf{Rta} : k = 3$$

19. Texto guía Página 188 Ejercicios: 15,19,21,25.

Criterio de comparación directa y criterio de comparación con límite

20. Analice la convergencia de las siguientes series.

- | | |
|--|---|
| <p>(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ Rta: C</p> | <p>(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$ Rta: C</p> |
| <p>(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ Rta: C</p> | <p>(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$ Rta: C</p> |
| <p>(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ Rta: C</p> | <p>(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$ Rta: D</p> |
| <p>(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2+1}$ Rta: C</p> | <p>(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ Rta: C</p> |
| <p>(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$ Rta: C</p> | <p>(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4-1}$ Rta: D</p> |
| <p>(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ Rta: D</p> | <p>(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ Rta: C</p> |
| <p>(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$ Rta: D</p> | |

21. Texto guía Página 192 Ejercicios: 15,17,19,21,23,25,29,33.

Criterio de Leibniz o de la serie alternante

22. Analice la convergencia de las siguientes series.

- | | |
|--|---|
| <p>(a) $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \dots$</p> | <p>(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$ Rta: D</p> |
| <p>(b) $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} + \dots$ Rta: C</p> | <p>(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$ Rta: C</p> |
| <p>(c) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$</p> | <p>(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$ Rta: C</p> |
| <p>(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n(n+1)}$ Rta: C</p> | |
| <p>(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$ Rta: C</p> | |
| <p>(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ Rta: C</p> | |

$$(j) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln(n)} \quad \text{Rta: D} \quad (k) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!} \quad \text{Rta: D}$$

23. ¿Para qué valores de p es convergente la serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

24. Texto guía Página 201 Ejercicios: 7,9,11,13.

Convergencia absoluta, convergencia condicional y criterios de la razón y de la raíz

Notación: AC denotará absolutamente Convergente y CC denotará condicionalmente Convergente.

25. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

$$\begin{array}{ll} (a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!} & \text{Rta: AC} \quad (g) \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{Rta: AC} \\ (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n(n+1)} & \text{Rta: CC} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)^{4^{2n+1}}} \quad \text{Rta: AC} \\ (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} & \text{Rta: AC} \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n \quad \text{Rta: AC} \\ (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{n3^n} & \text{Rta: D} \quad (j) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \text{Rta: D} \\ (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} & \text{Rta: CC} \quad (k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{n!} \quad \text{Rta: D} \\ (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}} & \text{Rta: CC} \quad (l) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} \end{array}$$

26. Los términos de una serie se definen en forma recursiva mediante las ecuaciones

$$a_1 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n.$$

Determine si $\sum a_n$ es convergente o divergente. **Rta:** D

27. ¿Para cuáles de las series siguientes la prueba de la razón no es concluyente (es decir, no proporciona una respuesta definida)?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}. & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}. \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}. & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}. \end{array}$$

Rta: (a) y (d).

28. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}.$$

29. (a) Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para toda x .

(b) Deduzca que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para toda x .

30. (a) Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge.

(b) Deduzca que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

31. Aplicar la prueba de la razón, para deducir la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

32. Texto guía Página 202 Ejercicios: 17,19,21,23,25,31.

Series de potencias (Radios e intervalos de convergencia)

33. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}. \quad \text{Rta: } 1, [-1, 1) \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}. \quad \text{Rta: } 2, (-2, 2)$$

$$\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}. \quad \text{Rta: } 1, [-1, 1] \quad \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}. \quad \text{Rta: } 3, (-5, 1)$$

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad \text{Rta: } \infty, (-\infty, \infty) \quad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}. \quad \text{Rta: } \frac{1}{2}, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

- (g) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln(n)}$. **Rta:** 4, $(-4, 4]$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$. **Rta:** $\frac{1}{3}$, $[-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}]$
- (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$. **Rta:** 1, $[1, 3]$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$. **Rta:** ∞ , $(-\infty, \infty)$
- (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n$, $b > 0$ **Rta:** b , $(a-b, a+b)$
- (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$, **Rta:** ∞ , $(-\infty, \infty)$
- (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$.

34. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n. \quad \text{Rta: } k^k$$

Series de Taylor y de Maclaurin

35. Si $f^n(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. **Rta:** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $R = 1$.
36. Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \rightarrow 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.
- (a) $f(x) = (1-x)^{-2}$. **Rta:** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $R = 1$
- (b) $f(x) = \sin(\pi x)$. **Rta:** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R = \infty$
- (c) $f(x) = e^{5x}$. **Rta:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n$, $R = \infty$
- (d) $f(x) = \sinh(x)$. **Rta:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$
- (e) $f(x) = \ln(1+x)$ (g) $f(x) = xe^x$
- (f) $f(x) = \cos(3x)$ (h) $f(x) = \cosh(x)$
37. Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a . [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \rightarrow 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

- (a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, $a = 1$. **Rta:** $-1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$, $R = \infty$
- (b) $f(x) = e^x$, $a = 3$. **Rta:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!} (x-3)^n$, $R = \infty$
- (c) $f(x) = \cos(x)$, $a = \pi$. **Rta:** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} (x-\pi)^{2n}$, $R = \infty$
- (d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 9$. **Rta:** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n 3^{2n+1} n!} (x-9)^n$, $R = 9$
- (e) $f(x) = x - x^3$, $a = -2$. (g) $f(x) = \sin(x)$, $a = \frac{\pi}{2}$
- (f) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -3$ (h) $f(x) = x^{-2}$, $a = 1$.

38. **Serie Binomial.** Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \dots, \quad (R = 1)$$

Use la serie binomial para expandir la función como una serie de potencias. Exprese el radio de convergencia.

- (a) $f(x) = \sqrt{1+x}$. **Rta:** $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n$, $R = 1$
- (b) $f(x) = \frac{1}{(2+x)^3}$. **Rta:** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4} n!} x^n$, $R = 2$
- (c) $f(x) = (1-x)^{2/3}$. (d) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^4}$.

39. Mediante la serie de Maclaurin para e^x calcule $e^{-0.2}$ con cinco posiciones decimales. **Rta:** 0.81873

40. Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

- (a) $\int x \cos(x^3) dx$. **Rta:** $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!}$, $R = \infty$
- (b) $\int \frac{\cos x - 1}{x} dx$. **Rta:** $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$
- (c) $\int \frac{e^x - 1}{x} dx$ (d) $\int \arctan(x^2) dx$

41. Utilice series para obtener un valor aproximado de la integral definida con la exactitud indicada.

- (a) $\int_0^1 x \cos(x^3) dx$. (Tres decimales) **Rta:** 0.440

- (b) $\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4} dx.$ ($|error| < 5 \cdot 10^{-6}$) **Rta:** 0.40102
- (c) $\int_0^1 e^{-x^2} dx.$ (Cuatro decimales) **Rta:** 0.7475

42. Mediante las series evalúe el límite.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}.$ **Rta:** $\frac{1}{3}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$ **Rta:** $\frac{1}{2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}.$ **Rta:** $\frac{1}{120}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

43. Calcule la suma de la serie.

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}.$ **Rta:** e^{-x^4} (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n} (2n)!}.$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1} (2n+1)!}.$ **Rta:** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$
- (e) $3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \dots$ **Rta:** $e^3 - 1$
- (f) $1 - e + \frac{e^2}{2!} - \frac{e^3}{3!} + \frac{e^4}{4!} - \dots$ **Rta:** e^{-e}
- (g) $1 - \ln(2) + \frac{(\ln(2)^2)}{2!} - \frac{(\ln(2)^3)}{3!} + \frac{(\ln(2)^4)}{4!} + \dots$

Ejercicios variados

- (a) (*) Use el hecho que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, para calcular la suma de la siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}.$ Respuesta: 1
- (b) (*) Calcule el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2}.$ Respuesta: $\frac{1}{2}$
- (c) (*) Verifique el valor de la siguiente serie

$$\sum_{x=1}^{\infty} x p^x = \frac{p}{(1-p)^2}.$$

- (d) (*) Una famosa sucesión f_n , llamada **sucesión de Fibonacci**, en honor de Leonardo Fibonacci, quien la introdujo aproximadamente en el año 1200, se define mediante la fórmula recursiva

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

- i. Calcule desde f_3 hasta f_{10} .
- ii. Sea $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618034$. Los gringos llamaron a este número *razón áurea* (razón dorada); afirmaron que un rectángulo cuyas dimensiones estaban en esta razón era perfecto". Se puede demostrar que

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\phi^n - (-1)\phi^{-n}] \end{aligned}$$

Verifique que esto da el resultado correcto $n = 1$ y $n = 2$. El resultado general se puede demostrar por inducción (es un buen reto). Use esta fórmula explícita para demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi.$$

Estrategia para analizar la convergencia o divergencia de series

1. ¿Tiende a 0 el término n -ésimo? Si no es así, la serie diverge.
2. ¿Es la serie de alguno de los tipos especiales: geométrica, serie p , telescópica o alternante?
3. ¿Se puede aplicar el criterio de la integral, el de la raíz o el cociente?
4. ¿Puede compararse la serie favorable o fácilmente con uno de los tipos especiales?

Resumen de criterios para las series

Criterio	Serie	Condición(es) de la convergencia	Condición(es) de la divergencia	Comentario
Término n -ésimo	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$	Este criterio no sirve para demostrar la convergencia
Series geométricas	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	$ r < 1$	$ r \geq 1$	Suma: $S = \frac{a}{1-r}$
Series telescópicas	$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$		Suma: $S = b_1 - L$
Series p	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	$p > 1$	$0 < p \leq 1$	
Series alternadas o alternantes	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$	$0 < a_{n+1} \leq a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$		Residuos: $ R_N \leq a_{N+1}$
Integral (f continua, positiva y decreciente)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = f(n) \geq 0$	$\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge	$\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge	Residuo: $0 < R_N < \int_N^{\infty} f(x) dx$
Raíz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } < 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } > 1$ o $= \infty$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = 1$.
Cociente	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right < 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right > 1$ o $= \infty$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = 1$.
Comparación directa ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$0 < b_n \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	
Comparación en el límite ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	