Universidad del Norte
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Taller de Cálculo II
Tercer Parcial
Profesor Coordinador: Javier de la Cruz
Periodo 30 de 2025

Nombre: ______________________ **Fecha:** __________

Observación: Recuerden que el texto guía es: Ron Larson y Bruce H. Edwards, Cálculo, novena edición, McGraw-Hill, 2011.

Área entre curvas

1. (Repaso) Calcule el área de la región bajo la curva en los intervalos dados.

   (a) $y = 2x + 3$, $I = [1, 4]$
   (b) $y = x^2 + 2x + 1$, $I = [-1, 3]$
   (c) $y = -x^2 + 2x + 3$, $I = [-1, 3]$
   (d) $y = 3(x^3 - x)$, $I = [-1, 0]$
   (e) $y = \sin x$, $I = [0, \pi]$
   (f) $y = 4x - x^2$, $I = [1, 3]$ $e = \overline{\omega} + g^3 + g^4 + \overline{\omega} g^5$

2. Trazar la región acotada por las curvas $f(x)$ y $y = 0$ y calcular su área.

   (a) $f(x) = 3(x^3 - x)$
   (b) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

3. Trazar la región acotada por las curvas dadas y calcular su área.

   (a) $y = x^2 - 1$, $y = -x + 2$, $x = 0$, $x = 1$
   (b) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = -x$, $x = 0$, $x = 1$. Respuesta: $\frac{17}{6}$ uc
   (c) $y = -x^3 + 3$, $y = x$, $x = -1$, $x = 1$
   (d) $y = \frac{1}{2}x^3 + 2$, $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$
   (e) $y = -\frac{3}{8}x(x - 8)$, $y = 10 - \frac{1}{2}x$, $x = 2$, $x = 8$

4. Calcule el área de la región limitada por las curvas dadas.

   (a) $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = 0$
   (b) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = x + 2$
   (c) $f(x) = x$, $g(x) = 2 - x$, $h(x) = 0$
   (d) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$
   (e) $f(x) = -x^2 + 4x$, $g(x) = x^2$. Respuesta: $\frac{8}{3}$
   (f) $f(x) = \sqrt{x} + 3$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$
   (g) $y^2 = 2x - 2$, $y = x - 5$. Resuelva el ejercicio usando elementos rectángulares de área verticales Δx. Respuesta: 18 uc
   (h) Resuelva el ejercicio anterior usando elementos rectángulares de área horizontales Δy
   (i) $y^2 = 3 - x$ y $y = x - 1$. Resuelva el ejercicio usando elementos rectángulares de área verticales Δx. Respuesta: $\frac{9}{2}$
   (j) Resuelva el ejercicio anterior usando elementos rectángulares de área horizontales Δy
   (k) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y $g(x) = x^2 - 4x$. Respuesta: $\frac{71}{6}$ uc
   (l) $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$. Respuesta: 24 uc

Volumen: Método de discos y arandelas

Discos

5. Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$, alrededor de la recta $y = 1$. Respuesta: $\frac{16}{15}\pi$

6. Determine el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = \sqrt{\sin x}$ y el eje x (entre 0 y π), alrededor del eje x. Respuesta: 2π

7. Encuentre el volumen del sólido formado al girar, alrededor de la recta $x = 1$, la región acotada por la curva $(x - 1)^2 = 20 - 4y$ y las rectas $x = 1$, $y = 1$ y $y = 3$, y a la derecha de $x = 1$. Respuesta: 24π

8. Encuentre el volumen del sólido formado al girar, alrededor del eje x, la región acotada por la curva $y = \sin x$ y la recta $y = 0$.

9. ($*$) Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$

10. ($*$) Demuestre que el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Arandelas

11. Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$, alrededor del eje x. Respuesta: $\frac{3}{10}\pi$

12. Determine el volumen del sólido de revolción formado al girar la región acotada por $f(x) = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y. Respuesta: $\frac{3}{2}\pi$

Variados: discos y arandelas

En los ejercicios 13 14 y 15 encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas al girar alrededor de las rectas dadas:

13. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$

    (a) el eje x. Respuesta $\frac{9\pi}{2}$

    (b) el eje y. Respuesta $\frac{36\pi\sqrt{3}}{5}$

    (c) la recta $x = 3$. Respuesta $\frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$

    (d) la recta $x = 6$. Respuesta $\frac{84\pi\sqrt{3}}{5}$

14. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

    (a) el eje x. Respuesta $\frac{32\pi}{3}$

    (b) la recta $y = 6$. Respuesta $\frac{64\pi}{3}$

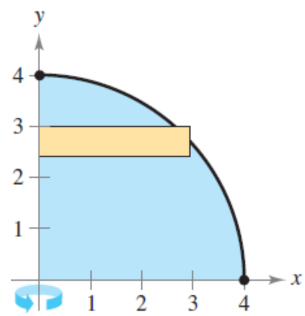
15. $y = 6 - 2x - x^2$, $y = x + 6$

    (a) el eje x

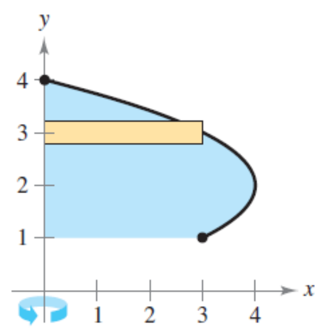
    (b) la recta $y = 3$

16. Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje y.

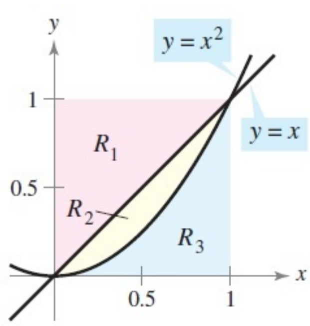
    (a) $y = \sqrt{16 - x^2}$



(b) $x = -y^2 + 4y$



17. Dadas las siguientes regiones en la siguiente fígura encuentre el volumen del sólido formado al girar dichas regiones alrededor de la recta indicada.



(a) R_1 alrededor de $x = 0$. Respuesta $\frac{\pi}{3}$

(b) R_2 alrededor de $y = 0$. Respuesta $\frac{2\pi}{15}$

(c) R_3 alrededor de $x = 0$. Respuesta $\frac{\pi}{2}$

(d) R_2 alrededor de $x = 0$. Respuesta $\frac{\pi}{6}$

(e) R_1 alrededor de $x = 1$.

(f) R_2 alrededor de $y = 1$.

(g) R_3 alrededor de $x = 1$.

(h) R_2 alrededor de $x = 1$.

18. Texto guía, Ejercicios 5.2, 17, 18, 19, 20.

Voumen: Método de capas cilíndricas

19. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región acotada por las curvas $y = 3x - x^3$, $x = 0$ y $y = 2$. Respuesta: $\frac{2\pi}{5}$

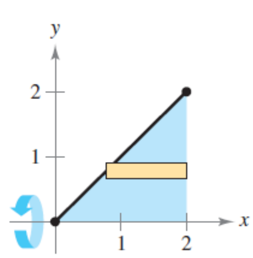
20. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $y = -3$ la región acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 1$ y $x = 2$. Respuesta: $\frac{66\pi}{5}$

21. Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y. Respuesta: $\frac{3\pi}{2}$. Resuelva este ejercicio por método de discos y arandelas y concluya que el método de capas en este caso es mejor.

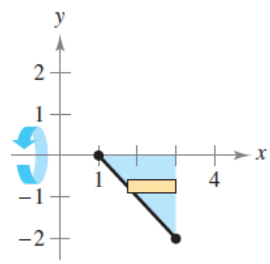
22. Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$ y $x = 1$ alrededor de la recta $x = 2$. Respuesta: $\frac{29\pi}{15}$. ¿ Es posible en este caso aplicar el método de discos o arandelas?

23. Usando capas encuentre el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje x.

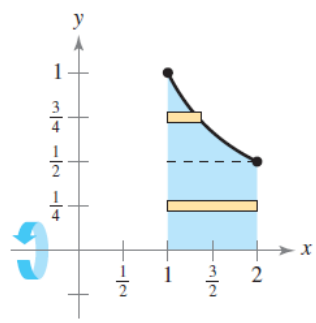
(a) $y = x$ Respuesta: $\frac{8\pi}{3}$



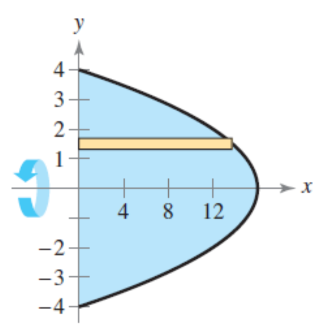
(b) $y = 1 - x$



(c) $y = \frac{1}{x}$. Respuesta: $\frac{\pi}{2}$



(d) $x + y^2 = 16$



24. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, alrededor del eje x. Respuesta: $\frac{768\pi}{7}$

25. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = 4-x$, $y = x$, $y = 0$, alrededor del eje x. Respuesta: $\frac{16\pi}{3}$

26. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = \sqrt{x+2}$, $y = x$, $y = 0$, alrededor del eje x.

27. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = 4x - x^2$, $y = 0$, alrededor de la recta $x = 5$. Respuesta: 64π

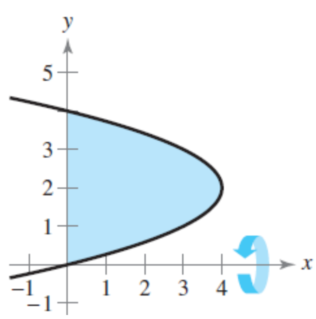
28. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = x^2$, $y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 4$. Respuesta: 16π

29. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = x^2$, $y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 2$.

30. Texto guía, Ejercicios 5.3, 9, 11, 13.

Variados: Discos, arandelas y capas

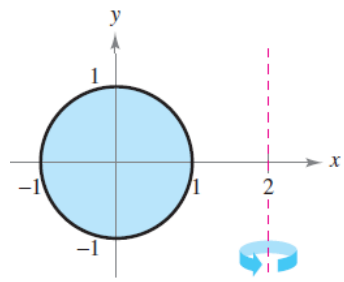
31. Decida cuál método es el más conveniente para calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por la curva $(y-2)^2 = 4 - x$ alrededor del eje x. Luego apliquelo.



32. Usar el método adecuado para calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

    (a) alrededor del eje x. Respuesta: $\frac{128\pi}{7}$
    (b) alrededor del eje y. Respuesta: $\frac{64\pi}{5}$
    (c) alrededor de la recta $x = 4$. Respuesta: $\frac{96\pi}{5}$

33. ($*$) Un toro se forma al girar la región acotada por la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ alrededor de la recta $x = 2$. Ecuentre el volumén de este sólido (el cual tiene forma de una rosquilla). Respuesta: $4\pi^2$



Longitud de arco

34. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$. Respuesta: $\frac{33}{16}$

35. Calcule la longitud de arco de la curva $y = 4x^{\frac{3}{2}}$ del punto $P(0,0)$ al punto $Q(1,4)$. Respuesta: ≈ 4.1493

36. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ en el intervalo $[1,8]$. Respuesta: $5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

37. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$ en el intervalo $[2,5]$. Respuesta: 309.3195

38. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $[0,4]$. Respuesta: $\frac{76}{3}$

39. Calcule la longitud de arco de la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ del punto $P(1,1)$ al punto $Q(8,4)$ usando dieferecial dx y diferencial dy. Respuesta: ≈ 7.6

40. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en el intervalo $[0,2]$.

41. Dado que la longitud de la circunferencia de radio r es $2\pi r$, encuentre el valor de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Respuesta: $\frac{\pi}{2}$

42. Texto guía, Ejercicios 5.4, 7,10,11.

Integrales impropias

Integrales impropias con límite de integración infinitos

43. Determine si la integral impropia converge o diverge. En caso de converger, encuentre el límite.

    (a) $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$

    (b) $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$. Respuesta: 1

    (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$. Respuesta: Diverge

    (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12}$. Respuesta: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

    (e) $\int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

    (f) $\int_{-\infty}^{0} x^2e^xdx$.

    (g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3xdx}{(3x^2+2)^3}$.

    (h) $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3dx}{x^2+9}$. Respuesta: $\frac{\pi}{3}$

    (i) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$. Respuesta: 2

    (j) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

    (k) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. Respuesta: 1

    (l) $\int_{1}^{+\infty} \ln xdx$. Respuesta: Diverge.

    (m) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos xdx$.

44. Demuestre que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ es convergente, mientras que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$ es divergente.

45. ¿Es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región limitada por las curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, y $x = 1$?

46. ¿Es posible asignar un número finito para representar la medida del volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región del Ejercicio 45 alrededor del eje x? Respuesta: Sí, π.

47. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ y el eje x. Respuesta: Sí, $\frac{\pi}{2}$.

48. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del volumen del sólido formado por la rotación, alrededor del eje x, de la región que se encuentra a la derecha de la recta $x = 1$ y limitada por la curva $y = \frac{1}{x^{3/2}}$ y el eje x. Respuesta: Sí, $\frac{\pi}{2}$.

49. Determine los valores de n para los cuales la integral $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^n x}$ es convergente.

Tabla de integrales

(a) $\int dx = x + c$

(b) $\int adx = ax + c$, donde a es una constante.

(c) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(d) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, donde $n \neq -1$

(e) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

(f) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, *donde* $a > 0$ y $a \neq 1$

(g) $\int e^x dx = e^x + c$

(h) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(i) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(j) $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

(k) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

(l) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

(m) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

(n) $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c$

(o) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$

(p) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(q) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

(r) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$, donde $a > 0$

(s) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$, donde $a \neq 0$

(t) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \text{arcsec} \frac{x}{a} + c$, donde $a > 0$

(u) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

(w) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{x-a}{x+a}| + c$, donde $a \neq 0$

(x) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{x+a}{x-a}| + c$, donde $a \neq 0$

Identidades trigométricas usadas

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\frac{\text{sen} x}{\cos x} = \tan x$
5. $\frac{\cos x}{\text{sen} x} = \cot x$
6. $\frac{1}{\text{sen} x} = \csc x$
7. $\frac{1}{\cos x} = \sec x$
8. $\frac{1}{\tan x} = \cot x$
9. $\text{sen}(2x) = 2\text{sen} x \cos x$
10. $\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2 x$
11. $\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
12. $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$