



INTRODUCCIÓN A LA BOSONIZACIÓN

JERESON SILVA VALENCIA

Topicos

- 1. Conceptos básicos.
- 2. Modelo de Hubbard.
- 3. Modelo de Heisenberg.
- 4. Resultados experimentales.

CONCEPTOS BÁSICOS

Un conjunto de átomos (²³Na o ⁶Li) es una colección de entidades indistinguibles, lo cual implica que la función de onda del sistema debe ser insensible ante los intercambios de partículas. Es decir

 $|P\Psi|^2 = |\Psi|^2$

donde Ψ es la función de onda y P es una permutación entre partículas. Las posibles soluciones son:

i)
$$P\Psi = \Psi$$
 para todo $P \implies$ La función de onda es "SIMETRICA" Estadística de Bose-Einstein
ii) $P\Psi = \begin{cases} +\Psi & \text{si P es par} \\ -\Psi & \text{si P es impar} \end{cases}$ La función de onda es "ANTISIMETRICA" Estadística de Bose-Einstein
La función de onda es "ANTISIMETRICA" Estadística de Bose-Einstein
Principio de exclusión de Pauli

Existe una conexión intima entre la estadística de un sistema de partículas y el espín intrínseco de cada una de ellas

 $Espin = \begin{cases} Entero \rightarrow Estadística de Bose - Einstein \rightarrow Fotones, mesones \pi, & {}^{4}He \\ Semi-entero \rightarrow Estadística de Fermi - Dirac \rightarrow electrones, nucleones, {}^{3}He \\ {}^{unidades de \hbar} \end{cases}$

Para un sistema de partículas indistinguibles se puede probar las siguientes relaciones

$$\frac{PV}{k_BT} = \frac{1}{a} \sum_{\varepsilon} Ln(1 + aze^{-\beta\varepsilon}) \qquad N = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + a} \qquad E = \sum_{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + a}$$

$$\langle n_{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + a} \quad \text{donde} \quad z = e^{\mu/k_BT} \quad \text{es la fugacidad y } \mu \text{ el potencial químico.}$$

$$\beta = \frac{1}{k_BT} \qquad \varepsilon \text{ Representa el espectro de energía de una partícula}$$

$$a = \begin{cases} -1 & \text{Bose-Einstein} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltzman} \\ 1 & \text{Fermi-Dirac} \end{cases}$$

Consideremos la siguiente cantidad para un sistema de N partículas indistinguibles en un volumen V a una temperetura T

es la longitud de onda térmica

distancia media entre partículas



Para un gas de Bosones libres podemos calcular el calor específico (a=-1)

$$\frac{C_V}{Nk_B} \equiv \frac{1}{Nk_B} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{3}{2} \left\{\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{PV}{Nk_B}\right)\right\}_{V}$$



Para un gas de Fermiones libres podemos calcular el calor específico (a=1)



Se encuentra que

$$p_F = \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{1/3} h \qquad \varepsilon_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}$$

La energía interna y la presión a T= 0 son

$$\frac{U_0}{N} = \frac{3}{5} \mathcal{E}_F \qquad P_0 = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \mathcal{E}_F$$



Que sucede si tenemos un sistema de fermiones interactuantes?

La teoría de líquidos de Fermi describe los estados de baja energía (base + excitaciones (p-h)) de un sistema de fermiones interactuantes.





Para el calor específico tenemos

Para el ³He se tiene que m*=3.0m



ESTRUCTURA DE ALGUNOS MATERIALES



M. Uehara, et al, JPSJ, 65, 2764,(1996).

El modelo de Hubbard:

Describe materiales como SrCuO₂, Sr₂CuO₃, V₂O₃

Tiene solución exacta por medio del Bethe Ansatz.



$$H = -t \sum_{j,\sigma} \left(C_{j,\sigma}^{\dagger} C_{j+1,\sigma} + h.c \right) + U \sum_{j} C_{j\uparrow}^{\dagger} C_{j\downarrow}^{\dagger} C_{j\downarrow}^{\dagger} C_{j\downarrow}$$
$$\left\{ C_{j\sigma}, C_{j'\sigma'}^{\dagger} \right\} = \left\{ C_{j\sigma}^{\dagger}, C_{j'\sigma'}^{\dagger} \right\} = 0 \qquad \left\{ C_{j\sigma}, C_{j'\sigma'}^{\dagger} \right\} = \delta_{j,j'} \delta_{\sigma,\sigma'}$$

Condiciones de Frontera periódicas

$$C^{\dagger}_{k\sigma} = \sum_{j=1}^{L} \frac{e^{ikj}}{\sqrt{L}} C^{\dagger}_{j\sigma} \qquad C_{k\sigma} = \sum_{j=1}^{L} \frac{e^{-ikj}}{\sqrt{L}} C_{j\sigma} \qquad k = \frac{2\pi}{L} n; n = 0, \pm 1, \dots, \frac{L}{2}$$

Sin interacciones se puede diagonalizar el Hamiltoniano

$$H_0 = -t \sum_{j\sigma} \left(C^{\dagger}_{j\sigma} C_{j+1\sigma} + h.c \right) = -\sum_k 2t \cos(k) C^{\dagger}_{k\sigma} C_{k\sigma} = \sum_k \epsilon(k) C^{\dagger}_{k\sigma} C_{k\sigma}$$



La superficie de Fermi viene dada por :

$$N = \sum_{k \le k_f} \theta(k_f - |k|) = \int_{-k_f}^{k_f} L \frac{dk}{2\pi} 2 = \frac{2k_f L}{\pi}$$
$$k_f = \frac{\pi N}{2L}$$

Para $U \ll t$, la teoría de perturbaciones permite descartar contribuciones de altas energías, por lo tanto solo nos quedamos en el subespacio de bajas energías.



Modelo con relación de dispersión lineal.

Nosotros definimos los operadores de campo

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} C_k \qquad \psi^{\dagger}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} C^{\dagger}_{k} \qquad \psi(x+L) = \psi(x)$$

Se puede mostrar:

$$\{\psi(x),\psi(y)\} = \{\psi^{\dagger}(x),\psi^{\dagger}(y)\} = 0$$

$$\left\{\psi(x),\psi^{\dagger}(y)\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{k}e^{ikx}C_{k},\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{p}e^{-ipy}C^{\dagger}_{k}\right\} = \frac{1}{L}\sum_{p,k}e^{ikx-ipy}\left\{C_{k},C^{\dagger}_{p}\right\} \qquad \textcircled{}$$

$$\left\{\psi(x),\psi^{\dagger}(y)\right\} = \delta(x-y)$$

La transformada inversa viene dada por :

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx \ e^{-ikx} \ \psi(x)$$

Espacio de Hilbert



El espacio de Hilbert H abarca todos los estados que pueden ser generados al aplicar un número finito de veces C_k y C_k^{\dagger} sobre $|0\rangle_0$

$$\widehat{N} = \sum_{k} \left[C^{\dagger}_{k} C_{k} - \left\langle C_{k}^{\dagger} C_{k} \right\rangle_{0} \right] \qquad \langle - \rangle_{0} = \langle 0| - |0\rangle_{0}$$

:ABCD: \rightarrow Ordenamiento normal de la cadena de operadores ABCD

$$: C^{\dagger}_{k1} C^{\dagger}_{k2} C_{k3} C_{k4} := -C^{\dagger}_{k2} C_{k4} C^{\dagger}_{k1} C_{k3} \qquad \widehat{N} = \sum_{k} : C^{\dagger}_{k} C_{k} :$$

$$k_{1} \leq 0, k_{2} > 0, k_{3} 0, \ k_{4} \leq 0$$

Operadores densidad:

Definimos los operadores de fluctuación de densidad (operadores densidad) como una combinación lineal de operadores que crean excitaciones partícula-hueco.

Note

$$\rho^{\dagger}(q) = \left(\sum_{k} C^{\dagger}_{k+q} C_{k}\right)^{\dagger} = \sum_{k} C^{\dagger}_{k} C_{k+q} = \sum_{k+q} C^{\dagger}_{k-q} C_{k} = \rho(-q)$$

También

$$: \psi^{\dagger}(x)\psi(x) := \frac{1}{L}\sum_{k,p} e^{-i(k-p)x}: C^{\dagger}_{k}C_{p}:= \frac{\hat{N}}{L} + \frac{1}{L}\sum_{q\neq 0} e^{-iqx}\rho(q)$$

Ahora vamos a calcular los conmutadores:

$$si p = -q \rightarrow [\rho(p), \rho(-p)] = \sum_{k} (C^{\dagger}_{k}C_{k} - C^{\dagger}_{k-p}C_{k-p}) = -\frac{L}{2\pi} \int_{-p}^{0} dk = -\frac{Lp}{2\pi}$$

$$[\rho(p),\rho(q)] = -\frac{Lp}{2\pi}\delta_{p,-q}$$

Parece una relación de conmutación de bosones !!

Definiendo

$$b_{q} = \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \rho(-q) \quad (q > 0) \qquad b^{\dagger}_{q} = \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \rho(q) \quad (q > 0)$$

$$[b_{q}, b_{q'}] = [b^{\dagger}_{q}, b^{\dagger}_{q'}] = 0$$

$$[b_{q}, b^{\dagger}_{q'}] = \left[\sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \rho(-q), \sqrt{\frac{2\pi}{Lq'}} \rho(q')\right] = \frac{2\pi}{L\sqrt{qq'}} [\rho(-q), \rho(q')] = \delta_{q,q'}$$

Entonces

$$\rho(q) = \begin{cases} \sqrt{\frac{Lq}{2\pi}} b^{\dagger}_{q} & q > 0 \\ \sqrt{\frac{L|q|}{2\pi}} b_{-q} & q < 0 \end{cases}$$

Se puede mostrar que

i)
$$: \psi^{\dagger}(x)\psi(x): = \frac{\hat{N}}{L} + \frac{1}{L}\sum_{q\neq 0}e^{-iqx}\rho(q) = \frac{\hat{N}}{L} + \frac{1}{\sqrt{2\pi L}}\sum_{q>0}\sqrt{q}\left[e^{iqx}b^{\dagger}_{q} + e^{iqx}b_{q}\right]$$

ii)
$$\begin{bmatrix} b_q, \widehat{N} \end{bmatrix} = 0$$
 $\begin{bmatrix} b^{\dagger}_q, \widehat{N} \end{bmatrix} = 0$
iii) $b_q |N\rangle_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \rho(-q) |N\rangle_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \sum_k C^{\dagger}_{k-q} C_k |N\rangle_0 = 0 \quad \forall q, N$

iv) $|N\rangle \in H_N \rightarrow |N\rangle = f[\{b^{\dagger}_q\}]|N\rangle_0$

Factores de Klein

Espacios de Hilbert con diferente número de partículas, no pueden ser conectados con b^{\dagger}_{q} , $b_{q} \neq \hat{N}$. Pero operadores fermiónicos de creación o destrucción pueden hacer esto.

$$\begin{bmatrix} F, b^{\dagger}_{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F, b_{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{\dagger}, b^{\dagger}_{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{\dagger}, b_{q} \end{bmatrix} = 0$$
$$F^{\dagger} |N\rangle_{0} = |N+1\rangle_{0} \qquad F |N\rangle_{0} = |N-1\rangle_{0}$$

i) F es unitario $\rightarrow F^{-1} = F^{\dagger}$ *ii)* $[F, \widehat{N}] = F$ *iii)* $[F^{\dagger}, \widehat{N}] = -F^{\dagger}$

Operadores de creación y destrucción

¿Cómo se expresa el operador $\psi(x)$ en términos de los operadores bosónicos b, \widehat{N} y los factores de Klein?

$$\begin{split} \left[b_{q},\psi(x)\right] &= \left[\sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \ \rho(-q) \ , \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{p} e^{ipx} C_{p}\right] = \frac{1}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \left[\sum_{k} C^{\dagger}_{k-q} C_{k} \ , \sum_{p} e^{ipx} C_{p}\right] \\ &= -\sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} e^{-iqx} \psi(x) \\ \left[b^{\dagger}_{q},\psi(x)\right] &= \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k,p} e^{ipx} \left[C^{\dagger}_{k+p} C_{k} \ , C_{p}\right] = -\sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} e^{iqx} \psi(x) \end{split}$$
$$\begin{aligned} \left[b_{q},\psi(x)\right] |N\rangle_{0} &= b_{q}\psi(x) |N\rangle_{0} = -\sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} e^{-iqx}\psi(x) |N\rangle_{0} = \alpha_{q}(x)\psi(x) |N\rangle_{0} \end{split}$$

Así $\psi(x)|N\rangle_0$ es un autoestado de b_q con autovalor $\alpha_q(x)$ para q > 0. Los autovectores De los operadores de destrucción son llamados estados coherentes.

$$\psi(x)|N\rangle_0 \propto e^{\sum_{q>0} \alpha_q(x) b^{\dagger}q} |N-1\rangle_0 = \Lambda(x)e^{\sum_{q>0} \alpha_q(x) b^{\dagger}q} F|N\rangle_0$$

$$\psi(x)|N\rangle_0 = \frac{F}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi N}{L}x}e^{\sum_{q>0}\alpha_q(x)\,b^{\dagger}_q} |N\rangle_0$$

Ahora vamos a generalizar este resultado para cualquier ket $|N\rangle$

$$|N\rangle = f[\{b^{\dagger}_{q}\}] |N\rangle_{0}$$

$$[b^{\dagger}_{q}, \psi(x)] = -\sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} e^{iqx} \psi(x) = \alpha^{*}_{q}(x)\psi(x) = b^{\dagger}_{q}\psi(x) - \psi(x)b^{\dagger}_{q}$$

$$\psi(x)b^{\dagger}_{q} = b^{\dagger}_{q}\psi(x) - \alpha^{*}_{q}(x)\psi(x) = (b^{\dagger}_{q} - \alpha^{*}_{q}(x))\psi(x)$$

$$\psi(x)(b^{\dagger}_{q})^{n} = (b^{\dagger}_{q} - \alpha^{*}_{q}(x))^{n}\psi(x)$$

$$\psi(x) f[\{b^{\dagger}_{q}\}] = f[\{b^{\dagger}_{q} - \alpha^{*}_{q}(x)\}]\psi(x)$$

$$\psi(x)|N\rangle = \psi(x) f[\{b^{\dagger}_{q}\}]|N\rangle_{0} = f[\{b^{\dagger}_{q} - \alpha^{*}_{q}(x)\}]\psi(x)|N\rangle_{0}$$
$$= \frac{F}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi\hat{N}}{L}x}e^{\sum_{q>0}\alpha_{q}(x)b^{\dagger}_{q}}f[\{b^{\dagger}_{q} - \alpha^{*}_{q}(x)\}]|N\rangle_{0}$$

$$\psi(x)|N\rangle = \frac{F}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi\hat{N}}{L}x}e^{\sum_{q>0}\alpha_q(x)b^{\dagger}q} e^{-\sum_{q>0}\alpha^*q(x)b_q} f[b^{\dagger}_q]|N\rangle_0 \qquad \bigcirc$$

Finalmente encontramos la formula de Mattis- Mandelstan:

$$\psi(x)|N\rangle = \frac{F}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi\hat{N}}{L}x}e^{\sum_{q>0}\alpha_q(x)b^{\dagger}q} e^{-\sum_{q>0}\alpha^*q(x)b_q}|N\rangle$$

Operadores de campo bosónicos

Es útil definir los siguientes campos bosonicos:

$$\varphi(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q>0} \alpha^*_{q}(x) e^{-\frac{1}{2}\alpha_q} b_q = \frac{i}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{e^{iqx}}{\sqrt{q}} e^{-\frac{1}{2}\alpha_q} b_q$$

$$\varphi^{\dagger}(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q>0} \alpha_q(x) e^{-\frac{1}{2}\alpha_q} b^{\dagger}_q = -\frac{i}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{q}} e^{-\frac{1}{2}\alpha_q} b^{\dagger}_q$$
$$\phi(x) = \varphi(x) + \varphi^{\dagger}(x) = \frac{i}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-\frac{1}{2}\alpha_q} \left[e^{iqx} b_q - e^{-iqx} b^{\dagger}_q \right]$$

así

$$\partial_x \phi = \frac{i}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-\frac{1}{2}\alpha_q} \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{iqx} b_q - e^{-iqx} b^{\dagger}_q \right] = -\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \sqrt{q} e^{-\frac{1}{2}\alpha_q} \left[e^{iqx} b_q + e^{-iqx} b^{\dagger}_q \right]$$

y obtenemos:

$$: \psi^{\dagger}(x)\psi(x): = \frac{\widehat{N}}{L} + \frac{1}{L}\sum_{q>0} \left[e^{-iqx}\rho(q) + e^{iqx}\rho(-q)\right] = \frac{\widehat{N}}{L} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_{x}\phi$$

También se puede probar que:

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = \left[\varphi^{\dagger}(x),\varphi^{\dagger}(y)\right] = 0 \qquad \left[\varphi(x),\varphi^{\dagger}(y)\right] = -\frac{1}{2\pi} Ln \left\{1 - e^{\frac{2\pi i}{L}(x-y+i\alpha)}\right\}$$

$$[\phi(x),\phi(y)] = -\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1 - e^{\frac{2\pi i}{L}(x-y+i\alpha)}}{1 - e^{\frac{-2\pi i}{L}(x-y-i\alpha)}} \right\}$$
$$[\phi(x),\partial_y\phi(y)] \cong -\frac{i}{\pi} \left(\frac{\alpha}{(x-y)^2 + \alpha^2} \right) \quad ; \ \alpha \to 0 \quad -i\delta(x-y)$$

Se mostro que:

$$\psi(x) = \frac{F}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi\hat{N}}{L}x} e^{\sum_{q>0} \alpha_q(x) b^{\dagger}q} e^{-\sum_{q>0} \alpha^*q(x) b_q}$$
$$= \frac{F}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi\hat{N}}{L}x} e^{-i\sqrt{2\pi}\phi(x)} e^{-\pi[\phi^{\dagger}(x),\phi(x)]}$$
$$= \frac{F}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi\hat{N}}{L}x} e^{-i\sqrt{2\pi}\phi(x)} \sqrt{\frac{L}{2\pi\alpha}} = \frac{F}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{i\frac{2\pi\hat{N}}{L}x} e^{-i\sqrt{2\pi}\phi(x)}$$

Hamiltoniano con relación de dispersión lineal

Se observó que para bajas energías uno puede linealizar la relación de dispersión. Para partículas que se mueven hacia la derecha tenemos $\epsilon(k) = v_f k$ tal que

$$H_0 = \sum_k \epsilon(k) : c^{\dagger}_k C_k := v_f \sum_k k : c^{\dagger}_k C_k :$$

¿Cómo expresar el Hamiltoniano H_0 en términos de operadores bosónicos?

$$H_0|N\rangle_0 = E_N^{(0)}|N\rangle_0$$

$$\frac{E_N^{(0)}}{v_f} = \begin{cases} \sum_{k>0} k : c^{\dagger}_k C_k := \sum_{k=\frac{2\pi}{L}}^{\frac{2\pi N}{L}} k = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{N} n = \frac{2\pi}{L} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{\pi}{L} N(N+1) \quad Para \quad N > 0 \\ 0 \quad Para \quad N = 0 \\ \sum_{k<0} k : c^{\dagger}_k C_k := \sum_{k=\frac{-2\pi N}{L}}^{\frac{2\pi}{L}} -k = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{N} n = \frac{2\pi}{L} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{\pi}{L} N(N+1) \quad Para \quad N < 0 \end{cases}$$

Así

$$E_N^{(0)} = \frac{\pi}{L} v_f N(N+1)$$

Calculemos

$$\left[\frac{H_0}{v_f}, b^{\dagger}_q\right] = \left[\sum_k k : c^{\dagger}_k c_k : , b^{\dagger}_q\right] = \sum_k k \left[: c^{\dagger}_k c_k : , \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \sum_p c^{\dagger}_{p+q} c_p\right] = q b^{\dagger}_q$$

$$H_0|N, E_N\rangle = E_N|N, E_N\rangle$$

$$\left[\frac{H_0}{v_f}, b^{\dagger}_q\right]|N, E_N\rangle = \frac{H_0}{v_f}b^{\dagger}_q|N, E_N\rangle - b^{\dagger}_q\frac{H_0}{v_f}|N, E_N\rangle = \frac{H_0}{v_f}b^{\dagger}_q|N, E_N\rangle - b^{\dagger}_q\frac{E_N}{v_f}|N, E_N\rangle$$

$$H_{0}b^{\dagger}{}_{q}|N,E_{N}\rangle = (E_{N}+qv_{f})b^{\dagger}{}_{q}|N,E_{N}\rangle$$

como
$$|N\rangle = f[\{b^{\dagger}{}_{q}\}]|N\rangle_{0}$$

La única forma posible para H_0 es

$$H_{0} = v_{f} \sum_{q>0} q b^{\dagger}_{q} b_{q} + \frac{\pi}{L} v_{f} \ \widehat{N}(\widehat{N}+1)$$

Consideremos el término

$$v_{f} \int_{-L/2}^{L/2} dx : \psi^{\dagger}(x)(-i\partial_{x})\psi(x) := ?$$

$$= v_{f} \int_{-L/2}^{L/2} dx : \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k} e^{-ikx} C^{\dagger}_{k} \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{p} p e^{ipx} C_{p} := v_{f} \sum_{k} k : c^{\dagger}_{k} C_{k} := H_{0}$$

Ahora consideremos

$$\frac{v_f}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx : (\partial_x \phi)^2 : + \frac{\pi}{L} v_f \, \hat{N}(\hat{N}+1) = ?$$

pero

$$\partial_x \phi = -\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \sqrt{q} \, e^{-\frac{1}{2}\alpha_q} \left[e^{iqx} b_q + e^{-iqx} b^{\dagger}_q \right]$$

$$\frac{v_f}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx : (\partial_x \phi)^2 : + \frac{\pi}{L} v_f \, \hat{N}(\hat{N}+1) = \frac{v_f}{2} 2 \sum_{q>0} q \, b^{\dagger}_q \, b_q + \frac{\pi}{L} v_f \, \hat{N}(\hat{N}+1)$$
$$= v_f \sum_{q>0} q \, b^{\dagger}_q \, b_q + \frac{\pi}{L} v_f \, \hat{N}(\hat{N}+1) = H_0$$

De la red al modelo linealizado

Ahora conectaremos nuestra discusión anterior con el modelo de red. Dejando de lado el spin podemos escribir

$$C_j = \sum_{k \in BZ} \frac{e^{ikj}}{\sqrt{L}} C_k$$

En el límite continuo tenemos que x \rightarrow aj , donde a \rightarrow 0, así el operador de campo fermionico Real ("Phys") es

$$\psi_{Phys}(x) = \sum_{k} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} C_k$$
$$\psi_{Phys}(x) = \sum_{k>0} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} C_k + \sum_{k<0} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} C_k = \sum_{k=-k_f}^{\infty} \frac{e^{i(k+k_f)x}}{\sqrt{L}} C_{k+k_f} + \sum_{k=-\infty}^{k_f} \frac{e^{i(k-k_f)x}}{\sqrt{L}} C_{k-k_f}$$

$$=e^{ik_fx}\left(\sum_{k=-k_f}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}}C_{k+k_f}\right)+e^{-ik_fx}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_f}\frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}}C_{k-k_f}\right)=e^{ik_fx}\ \psi_{R-Phys}(x)+e^{-ik_fx}\ \psi_{L-Phys}(x)$$



Ahora queremos relacionar el modelo de red a bajas energías con el modelo con relación de dispersión lineal.

Lo primero que se debe hacer es dejar que $k_f \to \infty$ en los dos primeros términos de arriba. Ahora tenemos dos ramas

$$\begin{array}{cccc} 1 & \rightarrow & R \\ 2 & \rightarrow & L \end{array}$$

Para el primer término tenemos :

$$\psi^{1}(x) = \sum_{k} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} C_{k}^{1} = \psi_{R}(x) \quad \rightarrow \quad \psi_{R-Phys}(x)$$

Para el segundo término definimos :

$$\bar{k} = -(k+k_f) \rightarrow \begin{cases} \bar{k} \leq 0 & \to \ filled \\ \bar{k} > 0 & \to \ empty \end{cases} \qquad \sum_{k} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} C_{k-k_f} & \xrightarrow{k \to -k} & \sum_{k} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{L}} C_{-k-k_f} \end{cases}$$

Entonces :

$$\psi^{2}(-x) = \sum_{k} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{L}} C_{k}^{2} = \psi_{L}(x) \quad \rightarrow \quad \psi_{L-Phys}(x)$$

La relación de dispersión para cada tipo de fermión es :

$$\epsilon_R(k) = v_f(k - k_f) \rightarrow \epsilon_1(k) = v_f k \rightarrow Cambia \ k \ por \ k + k_f$$

$$\epsilon_L(k) = -v_f(k+k_f) \rightarrow \epsilon_2(k) = v_f k \rightarrow Cambia \ k \ por \ -k - k_f$$

Entonces las partículas 1 y 2 tienen relaciones de dipersión lineales y para cada uno podemos escribir las relaciones que encontramos antes.

$$\begin{split} \psi_{R,L}(x) &= \sum_{k} \frac{e^{\pm ikx}}{\sqrt{L}} C^{R,L}_{k} \\ \{\psi_{R,L}(x), \psi_{R,L}(y)\} &= \left\{\psi^{\dagger}_{R,L}(x), \psi^{\dagger}_{R,L}(y)\right\} = 0 \qquad \left\{\psi_{R,L}(x), \psi^{\dagger}_{R,L}(y)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-y-nL) \\ \rho_{R,L}(q) &= \sum_{k} C^{R,L}_{k+q} C^{R,L}_{k} = \begin{cases} \sqrt{\frac{Lq}{2\pi}} b^{R,L}_{q} & q > 0 \\ \sqrt{\frac{L|q|}{2\pi}} b^{R,L}_{q} & q < 0 \end{cases} \\ \sqrt{\frac{L|q|}{2\pi}} b^{R,L}_{q} & q < 0 \end{cases} \\ \phi_{R,L}(x) &= \frac{i}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-\frac{1}{2}\alpha_{q}} \left(e^{\pm iqx} b^{R,L}_{q} - e^{\mp iqx} b^{R,L}_{q}\right) \\ \psi_{R,L}(x) &= \frac{F_{R,L}}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{\pm \frac{2\pi i \tilde{N}_{R,L}}{L}} e^{-i\sqrt{2\pi}} \phi_{R,L}(x) \end{split}$$

 $H_{0} = v_{f} \sum_{q>0} \sum_{\nu=R,L} q \ b_{q}^{\nu\dagger} \ b_{q}^{\nu} + \frac{\pi}{L} v_{f} \ \widehat{N}_{\nu} (\widehat{N}_{\nu} + 1) = v_{f} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[: \ \psi_{R}^{\dagger}(x)(-i\partial_{x})\psi_{R}(x) : + : \ \psi_{L}^{\dagger}(x)(i\partial_{x})\psi_{L}(x) : \right]$

$$H_{0} = \frac{v_{f}}{2} \sum_{\nu=R,L} \left[\int_{-L/2}^{L/2} dx : (\partial_{k} \phi_{\nu})^{2} : + \frac{\pi}{L} \, \widehat{N}_{\nu} (\widehat{N}_{\nu} + 1) \right]$$

Los campos duales

Es útil definir los campos duales

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_L - \phi_R) \qquad \phi_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta - \phi)$$

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_L + \phi_R) \qquad \phi_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta + \phi)$$

Con esto

$$\psi_{R,L}(x) = \frac{F_{R,L}}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{\pm i \frac{2\pi \widehat{N}_{R,L}}{L}x} e^{-i\sqrt{\pi} \left[\theta(x) \mp \phi(r)\right]}$$

$$\left[\phi(x), \partial_y \theta(y)\right] = i\delta(x - y) \quad \left[\phi(x), \phi(y)\right] = \left[\theta(x), \theta(y)\right] = 0 \qquad \left[\phi(x), \theta(y)\right] = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(x - y)$$

$$H_{0} = \frac{v_{f}}{2} \sum_{\nu=R,L} \left[\int_{-L/2}^{L/2} dx : (\partial_{k} \phi_{\nu})^{2} : + \frac{\pi}{L} \, \widehat{N}_{\nu} (\widehat{N}_{\nu} + 1) \right]$$

$$H_0 = \frac{v_f}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[: \ (\partial_x \theta)^2 \ : + : \ (\partial_x \phi)^2 \ : \right] + \frac{\pi}{L} v_f \sum_{\nu = R, L} \widehat{N}_{\nu} (\widehat{N}_{\nu} + 1)$$

Entonces se puede definir el campo canónico conjugado de $\phi(x)$

$$\Pi(x) = \partial_x \theta(x)$$

$$H_0(\pi, \phi) = \frac{v_f}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[: \pi^2 : + : (\partial_x \phi)^2 : \right] + \frac{\pi}{L} v_f \sum_{\nu = R, L} \widehat{N}_{\nu} (\widehat{N}_{\nu} + 1)$$

$$\psi_{R,L}(x) = \frac{F_{R,L}}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{\pm i \frac{2\pi \hat{N}_{R,L}}{L}x} e^{-i\sqrt{\pi} \left[\theta(x) \mp \phi(r)\right]}$$

$$\propto e^{\pm i\sqrt{\pi}\,\phi(x)}e^{-i\sqrt{\pi}\,\theta(x)} = e^{\pm i\sqrt{\pi}\,\phi(x)}e^{-i\sqrt{\pi}\,\int_{-L/2}^{L/2}dy\,\Pi(y)}$$



Un modelo interactuante sin espín

Ahora queremos aplicar estas ideas a un caso específico. Recordemos que

$$\psi(x) = e^{ik_f x} \psi_{R-Phys}(x) + e^{-ik_f x} \psi_{L-Phys}(x) \approx e^{ik_f x} \psi_R(x) + e^{-ik_f x} \psi_L(x)$$

El término de interacción entre los electrones es

$$\psi^{\dagger}\psi^{\dagger}\psi\psi \rightarrow \psi_{R}^{\dagger}\psi_{R}\psi_{R}^{\dagger}\psi_{R} + \psi_{L}^{\dagger}\psi_{L}\psi_{L}^{\dagger}\psi_{L} + \psi_{R}^{\dagger}\psi_{R}\psi_{L}^{\dagger}\psi_{L}$$

$$+ e^{-2ik_{f}x}\psi_{R}^{\dagger}\psi_{L}\psi_{R}^{\dagger}\psi_{R} + e^{-4ik_{f}x}\psi_{R}^{\dagger}\psi_{L}\psi_{R}^{\dagger}\psi_{L}$$

$$\overset{k,\sigma}{\underbrace{k',\sigma'}}\underbrace{k'-q,\sigma'}_{k',\sigma'}\underbrace{k'-q,\sigma'}_{k',\sigma'}$$

$$\underbrace{\downarrow}_{g_{4}}^{E}V(q\sim0)$$

$$k_{g_{2}}^{E}V(q\sim0)$$

$$H_{int} = g_2 \int_{-L/2}^{L/2} dx : \left(: \psi_R^{\dagger} \psi_R :: \psi_L^{\dagger} \psi_L :\right) :+ \frac{g_4}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[: \left(: \psi_R^{\dagger} \psi_R :\right)^2 :+: \left(: \psi_L^{\dagger} \psi_L :\right)^2 :\right]$$

pero :
$$\psi_{R,L}^{\dagger}(x)\psi_{R,L}(x)$$
 := $\frac{\widehat{N}_{R,L}}{L} \mp \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_x \phi_{R,L}$

así

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx : \left(: \psi_R^{\dagger} \psi_R :: \psi_L^{\dagger} \psi_L :\right) := \frac{\widehat{N}_R \widehat{N}_L}{L} - \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} : (\partial_x \phi_R) (\partial_x \phi_L) :$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx : (: \psi_{\nu}^{\dagger} \psi_{\nu} :)^{2} := \int_{-L/2}^{L/2} dx : \left(\frac{\widehat{N}_{\nu}}{L} \mp \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_{x} \phi_{\nu}\right)^{2} := \frac{\widehat{N}_{\nu}^{2}}{L} + \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dx : (\partial_{x} \phi_{\nu})^{2} :$$

entonces

$$H_{int} = g_2 \int_{-L/2}^{L/2} dx : \left(: \psi_R^{\dagger} \psi_R :: \psi_L^{\dagger} \psi_L : \right) : + \frac{g_4}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[: \left(: \psi_R^{\dagger} \psi_R : \right)^2 : + : \left(: \psi_L^{\dagger} \psi_L : \right)^2 : \right]$$

$$= \frac{1}{L} \left[\frac{g_4}{2} \left(\widehat{N}_R^2 + \widehat{N}_L^2 \right) + g_2 \widehat{N}_R \widehat{N}_L \right] + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{2\pi} \left[\frac{g_4}{2} \sum_{\nu} : (\partial_x \phi_{\nu})^2 :- g_2 : (\partial_x \phi_R) (\partial_x \phi_L) : \right]$$

El Hamiltoniano total viene dado por

$$H = H_0 + H_{int} = \frac{v_f}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \sum_{\nu} : (\partial_x \phi_{\nu})^2 : + \frac{\pi}{L} v_f \sum_{\nu} \widehat{N}_{\nu}^2$$
$$+ \frac{1}{L} \Big[\frac{g_4}{2} \left(\widehat{N}_R^2 + \widehat{N}_L^2 \right) + g_2 \widehat{N}_R \widehat{N}_L \Big] + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{2\pi} \Big[\frac{g_4}{2} \sum_{\nu} : (\partial_x \phi_{\nu})^2 : -g_2 : (\partial_x \phi_R) (\partial_x \phi_L) : \Big]$$

Definiendo $\bar{g}_2 = \frac{g_2}{2\pi v_f}$; $\bar{g}_4 = \frac{g_4}{2\pi v_f}$

$$H = \frac{v_f}{2} (1 + \bar{g}_4) \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[\sum_{\nu} : (\partial_x \phi_{\nu})^2 : -\frac{2\bar{g}_2}{(1 + \bar{g}_4)} : (\partial_x \phi_R) (\partial_x \phi_L) : \right] + \frac{\pi v_f}{L} (1 + \bar{g}_4) \left[\sum_{\nu} \hat{N}_{\nu}^2 + \frac{2\bar{g}_2}{(1 + \bar{g}_4)} \hat{N}_R \hat{N}_L \right]$$

$$H = \frac{v_f}{2} (1 + \bar{g}_4) \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[\sum_{\nu} : (\partial_x \phi_{\nu})^2 : -2\lambda : (\partial_x \phi_R) (\partial_x \phi_L) : \right] + \frac{\pi v_f}{L} (1 + \bar{g}_4) \left[\sum_{\nu} \widehat{N}_{\nu}^2 + 2\lambda \ \widehat{N}_R \widehat{N}_L \right]$$

donde $\lambda = \frac{\bar{g}_2}{(1 + \bar{g}_4)}$

pero

$$\partial_x \phi_{R,L}(x) = -\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-\alpha_q/2} \left[\pm q e^{\pm iqx} b_q^{R,L} \pm q e^{\mp iqx} b_q^{R,L^{\dagger}} \right]$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \sqrt{q} e^{-\alpha_q/2} \left[e^{\pm iqx} b_q^{R,L} + e^{\mp iqx} b_q^{R,L^{\dagger}} \right]$$
así

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx : \left(\partial_x \phi_{R,L}\right)^2 := \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx : \left(\pm \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \sqrt{q} e^{-\frac{\alpha_q}{2}} \left[e^{\pm iqx} b_q^{R,L} + e^{\mp iqx} b_q^{R,L^{\dagger}} \right] \right)$$

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{p>0} \sqrt{p} e^{-\frac{\alpha_p}{2}} \left[e^{\pm ipx} b_p^{R,L} + e^{\mp ipx} b_p^{R,L^{\dagger}} \right] \right) = 2 \sum_{q>0} q b_q^{R,L^{\dagger}} b_q^{R,L}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx : (\partial_x \phi_R)(\partial_x \phi_L) := \int_{-L/2}^{L/2} dx : \left(-\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \sqrt{q} e^{-\alpha_q/2} \left[e^{iqx} b_q^R + e^{-iqx} b_q^{R^{\dagger}} \right] \right)$$

$$\left(+\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{p>0}\sqrt{p}e^{-\alpha_{p}}/2\left[e^{-ipx}b_{p}^{L}+e^{ipx}b_{p}^{L^{\dagger}}\right]\right) = -\sum_{q}q\left[b_{q}^{R}b_{q}^{L}+b_{q}^{R^{\dagger}}b_{q}^{L^{\dagger}}\right]$$

entonces

$$H = v_f (1 + \bar{g}_4) \sum_q q \left[\sum_{\nu} b_q^{\nu \dagger} b_q^{\nu} + \lambda \left(b_q^{R^{\dagger}} b_q^{L^{\dagger}} + b_q^R b_q^L \right) \right] + \frac{\pi v_f}{L} (1 + \bar{g}_4) \left[\sum_{\nu} \widehat{N}_{\nu}^2 + 2\lambda \ \widehat{N}_R \widehat{N}_L \right]$$

Este Hamiltoniano puede ser diagonalizado, realizando una transformación de Bogoliubov, es decir, definimos los nuevos operadores bosónicos.

$$d_{q}^{1} = \cosh \gamma \ b_{q}^{R} + \sinh \gamma \ b_{q}^{L^{\dagger}} \qquad d_{q}^{2^{\dagger}} = \sinh \gamma \ b_{q}^{R} + \cosh \gamma \ b_{q}^{L^{\dagger}}$$

$$y \qquad b_{q}^{R} = \cosh \gamma \ d_{q}^{1} - \sinh \gamma \ d_{q}^{2^{\dagger}} \qquad b_{q}^{L^{\dagger}} = -\sinh \gamma \ d_{q}^{1} + \cosh \gamma \ d_{q}^{2^{\dagger}}$$

$$\sum_{\nu} \ b_{q}^{\nu^{\dagger}} b_{q}^{\nu} + \lambda \left(\ b_{q}^{R^{\dagger}} \ b_{q}^{L^{\dagger}} + \ b_{q}^{R} \ b_{q}^{L} \right) = \left(\cosh^{2} \gamma + \sinh^{2} \gamma - 2\lambda \sinh \gamma \ \cosh \gamma \right) \left(d_{q}^{1^{\dagger}} d_{q}^{1} + d_{q}^{2^{\dagger}} d_{q}^{2^{\dagger}} + \left[\lambda (\cosh^{2} \gamma + \sinh^{2} \gamma) - 2 \sinh \gamma \ \cosh \gamma \right] \left(d_{q}^{2^{\dagger}} d_{q}^{1^{\dagger}} + d_{q}^{1} d_{q}^{2} \right) + 2 \sinh^{2} \gamma - 2\lambda \sinh \gamma \cosh \gamma$$
donde

uunue

 $\lambda(\cosh^2\gamma + \sinh^2\gamma) - 2\lambda\sinh\gamma\cosh\gamma = 0 \longrightarrow \lambda = \tanh 2\gamma \longrightarrow \gamma = \frac{1}{4}Ln\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$

Por lo tanto el Hamiltoniano diagonalizado es

$$H = v_F (1 + \bar{g}_4) \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_{\nu=1,2} \sum_{q>0} q d_q^{\nu \dagger} d_q^{\nu} + const$$

Definiendo:

$$K \equiv \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\bar{g}_2}{1+\bar{g}_4}}{1+\frac{\bar{g}_2}{1+\bar{g}_4}}} = \sqrt{\frac{1+\bar{g}_4-\bar{g}_2}{1+\bar{g}_4+\bar{g}_2}}$$

$$u = v_f (1 + \bar{g}_4)\sqrt{1 - \lambda^2} = v_f \sqrt{(1 + \bar{g}_4)^2 \left(1 - \frac{\bar{g}_2^2}{(1 + \bar{g}_4)^2}\right)} = v_f \sqrt{(1 + \bar{g}_4)^2 - \bar{g}_2^2}$$

Finalmente tenemos:

$$H = u \sum_{\nu} \sum_{q>0} q \ d_q^{\nu \dagger} d_q^{\nu}$$

También tenemos:

$$H_N = \frac{\pi v_f}{L} (1 + \bar{g}_4) \left[\sum_{\nu} \hat{N}_{\nu}^2 + 2\lambda N_R N_L \right]$$

Definiendo $\widehat{N}=\widehat{N}_R+\widehat{N}_L~~{
m y}~~\widehat{{
m J}}~=\,\widehat{N}_R-\widehat{N}_L$, se puede mostrar que

$$H_N = \frac{\pi v_f}{2L} (1 + \bar{g}_4) \left[(1 + \lambda) \hat{N}^2 + (1 - \lambda) \hat{J}^2 \right] = \frac{\pi}{2L} \frac{u}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \left[(1 + \lambda) \hat{N}^2 + (1 - \lambda) \hat{J}^2 \right]$$

$$= \frac{\pi}{2L} \left[\frac{u}{K} \widehat{N}^2 + uK \widehat{J}^2 \right]$$

Los nuevos campos bosonicos vienen dados por

$$\phi_{1,2}(x) = \frac{i}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-\alpha_q/2} \left[e^{\pm iqx} d_q^{1,2} - e^{\mp iqx} d_q^{1,2^{\dagger}} \right]$$

En términos de estos campos el Hamiltoniano queda

$$H = u \sum_{\nu} \sum_{q>0} q \ d_q^{\nu \dagger} d_q^{\nu} = \frac{u}{2} \sum_{\nu=1,2} \int_{-L/2}^{L/2} dx : \ (\partial_x \phi_{\nu})^2 :$$

Usando la transformación de Bogoliubov podemos escribir

$$\phi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{K} \,\theta(x) \mp \frac{\phi(x)}{\sqrt{K}} \right]$$

Donde θ y ϕ son los campos duales definidos antes. Finalmente podemos escribir

$$H = \frac{u}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[K : (\partial_x \theta)^2 : + \frac{1}{K} : (\partial_x \phi)^2 : \right]$$
(*)

Los pares $[\phi(x), \pi_{\phi}(y) = \partial_{y}\theta(y)]$ y $[\theta(x), \pi_{\theta}(y) = \partial_{y}\phi(y)]$ son ambos canónicamente conjugados y llevan a equivalentes representaciones de (*)

$$K = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} = \begin{cases} <1 \rightarrow & interacciones \ repulsivas \ \lambda > 0 \\ = 1 & \rightarrow & no \ interactuante \\ >1 \rightarrow & interacciones \ atractivas \ \lambda & < 0 \end{cases}$$

Calor específico

El calor específico del modelo de fermiones interactuantes sin espín es:

$$C_V = \frac{T}{u} \left(\frac{L\pi}{3}\right)$$

Note que para un sistema de fermiones libres se tiene

$$C_V^0 = \frac{T}{v_f} \left(\frac{L\pi}{3}\right)$$

También se puede probar que el cociente entre la compresibilidad del sistema interactuante y el sistema libre viene dado por

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = K \frac{v_f}{u}$$



Funciones de Correlación



* Densidad

El operador de campo fermiónico viene dado por

$$\psi(x) \approx e^{ik_f x} \psi_R(x) + e^{-ik_f x} \psi_L(x)$$

El operador densidad es igual a

$$: \psi^{\dagger}(x)\psi(x) :=: \psi_R^{\dagger}(x)\psi_R(x): +: \psi_L^{\dagger}(x)\psi_L(x): + e^{-2ik_f x}: \psi_R^{\dagger}(x)\psi_L(x):$$
$$+ e^{2ik_f x}: \psi_L^{\dagger}(x)\psi_R(x):$$

La parte suave viene dada por el operador

$$\begin{split} \hat{O}_{c}(x) &= :\psi_{R}^{\dagger}(x)\psi_{R}(x): + :\psi_{L}^{\dagger}(x)\psi_{L}(x):=\frac{\widehat{N}}{L} + \sqrt{\frac{K}{2\pi}}\left(\partial_{x}\phi_{2}(x) - \partial_{x}\phi_{1}(x)\right) \\ &= \frac{\widehat{N}}{L} + \sqrt{\frac{K}{2\pi L}}\sum_{q>0}\sqrt{q} \ e^{-\frac{1}{2}\alpha_{q}}\left(e^{-iqx}\left(d_{q}^{2} + d_{q}^{1}^{\dagger}\right) + e^{iqx}\left(d_{q}^{2}^{\dagger} + d_{q}^{1}\right)\right) \end{split}$$

La función de correlación viene dada por

 $D_C(x, y) \equiv \left\langle \,\delta \hat{O}_c(x) \,\,\delta \hat{O}_c(y) \,\right\rangle$

$$D_c(x,y) = \frac{K}{2\pi L} \sum_{q>0} q e^{-\alpha_q} \left(e^{-iq(x-y)} + e^{iq(x-y)} \right) = \frac{K}{2\pi L} \sum_q 2q \cos q(x-y) = -\frac{K}{2\pi^2 (x-y)^2}$$

El operador de la parte oscilante es

$$\hat{O}_{CDW}(x) = e^{-2ik_f x} e^{-i\frac{2\pi}{L}(\hat{N}_R + \hat{N}_L + 1)x} \frac{F_R^{\dagger} F_L}{L} e^{i\sqrt{2\pi}[\varphi_R^{\dagger}(x) - \varphi_L^{\dagger}(x)]} e^{i\sqrt{2\pi}[\varphi_R(x) - \varphi_L(x)]}$$

La función de correlación es definida por

$$D_{CDW}(x-y) = \left\langle \hat{O}_{CDW}(x) \ \hat{O}_{CDW}^{\dagger}(y) + h. c \right\rangle \propto \frac{\cos\left(2k_f(x-y)\right)}{|x-y|^{2K}}$$

Otras funciones de correlación que se pueden calcular son:

* $4k_f$ density oscillations

$$\hat{O}_{4k_f} \equiv e^{-4ik_f x} \psi_R^{\dagger} \psi_L \psi_R^{\dagger} \psi_L \rightarrow \left\langle \hat{O}_{4k_f}(x) \ \hat{O}_{4k_f}^{\dagger}(x) + h.c \right\rangle \propto \frac{\cos(4k_f x)}{|x|^{8K}}$$
* Pairing correlations
$$\hat{O}_p \equiv \psi_R^{\dagger} \psi_L \rightarrow \left\langle \hat{O}_p(x) \ \hat{O}_p^{\dagger}(x) + h.c \right\rangle \propto \frac{1}{|x|^{2/K}}$$



También se puede mostrar que la función de Green para una partícula viene dada por

$$\tilde{G}(x,t) = \left(\frac{e^{ik_f x}}{2\pi(x-ut)} - \frac{e^{-ik_f x}}{2\pi(x+ut)}\right) \left(\frac{\alpha^2}{x^2 - u^2 t^2}\right)^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{K} + K - 2\right)}$$

Con este resultado podemos obtener la densidad de estados local

$$P_{local}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} \,\tilde{G}(x=0,t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}\left(K+\frac{1}{K}\right)}} \propto \omega^{\frac{1}{2}\left(K+\frac{1}{K}\right)-1}$$

La función de distribución de momentos

$$\eta_R(k) \equiv \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \ e^{-ikx} \ \tilde{G}(x,t=0) \ \sim \ \frac{1}{2} - C \ sgn\left(k - k_f\right) |k - k_f|^{\nu-1}$$





Para espines S=1/2 tenemos



por medio del Bethe Ansatz.

En el caso s=1/2, existe una transformación que permite expresar los operadores de espín en términos de operadores sin espín (transfromación de Jordan-Wigner)

$$S_j^z \rightarrow c_j^{\dagger} c_j - \frac{1}{2} \qquad S_j^- \rightarrow c_j e^{-i\pi\phi_j} \qquad S_j^+ \rightarrow c_j^{\dagger} e^{i\pi\phi_j} \qquad \phi = \sum_{l=1}^{j-1} n_l$$

i-1

Ahora vamos a mapear el Hamiltoniano

$$S_{j}^{x}S_{j+1}^{x} + S_{j}^{y}S_{j+1}^{y} = \frac{1}{2} \left(S_{j}^{+}S_{j+1}^{-} + S_{j}^{-}S_{j+1}^{+} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(c_{j}^{\dagger}c_{j+1} - c_{j}c_{j+1}^{\dagger} \right) = \frac{1}{2} \left(c_{j}^{\dagger}c_{j+1} + c_{j+1}^{\dagger}c_{j} \right) = \frac{1}{2} \left(c_{j}^{\dagger}c_{j+1} + h.c \right)$$

Entonces

$$H_{XXZ} = J \sum_{j} \left(S_{j}^{x} S_{j+1}^{x} + S_{j}^{y} S_{j+1}^{y} + \Delta S_{j}^{z} S_{j+1}^{z} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{j} \left(c_{j}^{\dagger} c_{j+1} + h.c \right) + \Delta \sum_{j} \left(n_{j} - \frac{1}{2} \right) \left(n_{j+1} - \frac{1}{2} \right)$$

La magnetización total a lo largo del eje z

$$M = \sum_{j=1}^{L} S_j^z = \sum_{j=1}^{L} \left(c_j^{\dagger} c_j - \frac{1}{2} \right) = \sum_{j=1}^{L} c_j^{\dagger} c_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{L} = N - \frac{1}{2}$$

Como trabajaremos en el sector M = 0, entonces $N = \frac{L}{2} \rightarrow$ no hay término de borde

El vector de Fermi es $k_F = \pi n = \pi \frac{N}{L} = \frac{\pi}{L} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$

Ahora tenemos un modelo interactuante al cual le aplicaremos el método de bosonización

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j} \left(c_{j}^{\dagger} c_{j+1} + h. c \right) + \Delta \sum_{j} \left(n_{j} - \frac{1}{2} \right) \left(n_{j+1} - \frac{1}{2} \right)$$

El operador de campo fermionico se puede expresar así

$$\psi(x) \approx e^{ik_f x} \psi_R(x) + e^{-ik_f x} \psi_L(x)$$

La parte planar (XY) es familiar para nosotros

$$H_{XY} \approx \sum_{k,\nu} k : C_{k\nu}^{\dagger} C_{k\nu} := \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[:\psi_R^{\dagger}(x)(-i\partial_x)\psi_R(x) : + :\psi_L^{\dagger}(x)(i\partial_x)\psi_L(x) \right]$$

Nosotros sabemos que

$$S_j^z = c_j^{\dagger} c_j - \frac{1}{2}$$

$$S_j^z \approx :\psi^{\dagger}(x)\psi(x) : = : \left(e^{-ik_f x}\psi_R^{\dagger}(x) + e^{ik_f x}\psi_L^{\dagger}(x)\right) \left(e^{ik_f x}\psi_R^{\dagger}(x) + e^{-ik_f x}\psi_L^{\dagger}(x)\right) :$$

$$S_{j}^{z} \approx \sum_{\nu} : \psi_{\nu}^{\dagger}(x) \psi_{\nu}(x) : + (-1)^{j} \psi_{R}^{\dagger}(x) \psi_{L}(x) + (-1)^{j} \psi_{L}^{\dagger}(x) \psi_{R}(x)$$

entonces

$$S_{j}^{z} S_{j+1}^{z} \approx \left(: \psi_{R}^{\dagger}(x) \psi_{R}(x) :\right)^{2} + \left(: \psi_{L}^{\dagger}(x) \psi_{L}(x) :\right)^{2} + 2 : \psi_{R}^{\dagger}(x) \psi_{R}(x) :: \psi_{L}^{\dagger}(x) \psi_{L}(x) :$$
$$+ 2 \psi_{R}^{\dagger}(x) \psi_{R}(x) \psi_{L}^{\dagger}(x) \psi_{L}(x) - \left(\psi_{R}^{\dagger}(x) \psi_{L}(x)\right)^{2} - \left(\psi_{L}^{\dagger}(x) \psi_{R}(x)\right)^{2}$$
$$S_{j}^{z} S_{j+1}^{z} \approx \left(: \psi_{R}^{\dagger}(x) \psi_{R}(x) :\right)^{2} + \left(: \psi_{L}^{\dagger}(x) \psi_{L}(x) :\right)^{2} + 4 : \psi_{R}^{\dagger}(x) \psi_{R}(x) :: \psi_{L}^{\dagger}(x) \psi_{L}(x) :$$

De esta forma tenemos que

$$\begin{split} H_{XXZ} &= J \sum_{j} \left(S_{j}^{x} S_{j+1}^{x} + S_{j}^{y} S_{j+1}^{y} + \Delta S_{j}^{z} S_{j+1}^{z} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j} \left(c_{j}^{\dagger} c_{j+1} + h. c \right) + \Delta \sum_{j} \left(n_{j} - \frac{1}{2} \right) \left(n_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[: \psi_{R}^{\dagger}(x) (-i\partial_{x}) \psi_{R}(x) : + : \psi_{L}^{\dagger}(x) (i\partial_{x}) \psi_{L}(x) \right] \\ &+ \Delta \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[: \left(: \psi_{R}^{\dagger}(x) \psi_{R}(x) : \right)^{2} : + : \left(: \psi_{L}^{\dagger}(x) \psi_{L}(x) : \right)^{2} : \right] \\ &+ 4\Delta \int_{-L/2}^{L/2} dx : \left(: \psi_{R}^{\dagger}(x) \psi_{R}(x) : : \psi_{L}^{\dagger}(x) \psi_{L}(x) : \right) : \end{split}$$

El procedimiento anterior es válido para $\Delta \ \ll \ 1$, la velocidad y el parámetro de interacción vienen dados por:

$$K = \sqrt{\frac{1 + \bar{g}_4 - \bar{g}_2}{1 + \bar{g}_4 + \bar{g}_2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{g_4}{2\pi} - \frac{g_2}{2\pi}}{1 + \frac{g_4}{2\pi} + \frac{g_2}{2\pi}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\Delta}{\pi} - \frac{2\Delta}{\pi}}{1 + \frac{\Delta}{\pi} + \frac{2\Delta}{\pi}}} \approx \sqrt{\frac{1 - \frac{\Delta}{\pi}}{1 + \frac{3\Delta}{\pi}}} = 1 - \frac{2\Delta}{\pi}$$

$$u = \sqrt{(1 + \tilde{g}_4)^2 - \tilde{g}_2^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{g_4}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{g_2}{2\pi}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{2\pi}\right)^2} = 1 + \frac{\Delta}{\pi}$$

Conjetura del líquido de Luttinger de Haldane

Basados en argumentos de grupo de renormalización Duncan Haldane conjeturo, que el Hamiltoniano del modelo de Luttinger es válido aún lejos de la región perturbativa.

Mas aún esta conjetura debe ser valida para cualquier sistema unidimensional interactuante sin gap. Hoy esto es universalmente considerado cierto y ha sido comprobado muchos modelos.

La conjetura de Haldane es un poco mas predictiva, ya que el modelo efectivo para bajas energías involucra tres parámetros $u, v_N = \frac{u}{k} y v_J = uk$

$$H_{eff} = u \sum_{\nu} \sum_{q>0} q \ d_q^{\nu \dagger} d_q^{\nu} + \frac{\pi}{2L} \left[v_N \hat{N}^2 + v_I \hat{J}^2 \right] \tag{*}$$

Pero el proceso de bosonización solo produce dos u y k

Por lo tanto se satisfacen las siguientes relaciones $u^2 = v_N v_I$ $k^2 = \frac{v_I}{v_N}$ (**)

Sistemas unidimensionales sin gap cuyas propiedades a bajas energías pueden ser descritas por el Hamiltoniano (*), tal que se cumplan las relaciones (* *) son llamados líquidos de Luttinger.

De la solución del modelo de Heisenberg vía ansatz de Bethe se obtiene

$$\frac{\Delta}{J} = -\cos \pi \beta^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k} = 2\beta^2 \qquad \qquad u = \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(\pi (1 - \beta^2)) \frac{J}{2}$$

El modelo de Hubbard

El modelo de Hubbard viene dado por

$$H = -t \sum_{j,\sigma} c_{j,\sigma}^{\dagger} c_{j,\sigma} + U \sum_{j} n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}$$

Donde $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^{\dagger} c_{i\sigma}$ es l número de electrones con espín σ en el sitio i Al bosonizar el Hamiltoniano de Hubbard y diagonalizarlo, obtenemos

$$H = \sum_{\nu,\lambda} u_{\lambda} \sum_{q>0} q \ d_{q\lambda}^{\nu\dagger} \ d_{q\lambda}^{\nu} + \frac{\pi}{2L} \left[v_{N\lambda} \ \widehat{N}_{\lambda}^{2} + v_{I\lambda} \ \widehat{J}_{\lambda}^{2} \right]$$

 λ Indica el sector de carga (c) y espín (S) desacoplados !!!

$$u_{\lambda} \equiv v_f \sqrt{\left(1 + \frac{g_{4\lambda}}{2\pi v_f}\right)^2 - \left(\frac{g_{2\lambda}}{2\pi v_f}\right)^2} \qquad \qquad K_{\lambda} \equiv \sqrt{\frac{2\pi v_f + g_{4\lambda} - g_{2\lambda}}{2\pi v_f + g_{4\lambda} + g_{2\lambda}}}$$

$$v_{N\lambda} = \frac{u_{\lambda}}{K_{\lambda}}$$
 $v_{I\lambda} = u_{\lambda}K_{\lambda}$ $u_{\lambda}^2 = v_{N\lambda}v_{I\lambda}$

De aquí ver que $u_c \neq u_s$ lo cual conduce a la separación de carga y espín



Para el modelo de Hubbard tenemos $(U \ll t)$

$$k_c \approx 1 - \frac{U}{\pi v_f}$$
 $u_c \approx v_f \left(1 + \frac{U}{\pi v_f}\right)$

 $K_s = 1 \qquad \qquad u_s = v_f < u_c$

Resultados experimentales

PHYSICAL REVIEW B

VOLUME 58, NUMBER 3

On-chain electrodynamics of metallic (TMTSF)₂X salts: Observation of Tomonaga-Luttinger liquid response

A. Schwartz,^{*} M. Dressel,[†] and G. Grüner Department of Physics and Astronomy, University of California, Los Angeles, California 90095-1547

> V. Vescoli and L. Degiorgi Laboratorium Festkörperphysik, ETH-Zürich, CH-8093 Zürich, Switzerland

T. Giamarchi Laboratoire de Physique des Solides, Université Paris-Sud, Bâtiment 510, 91405 Orsay, France (Received 14 January 1998)



Non-Fermi-Liquid Behavior in Quasi-One-Dimensional Li0.9 Mo6O17

J. Hager,¹ R. Matzdorf,¹ J. He,² R. Jin,² D. Mandrus,^{2,3} M. A. Cazalilla,⁴ and E. W. Plummer^{2,3}

¹Fachbereich Naturwissenschaften, Universität Kassel, 34109 Kassel, Germany

²Oak Ridge National Laboratory, 1 Bethel Valley Road, Oak Ridge, Tennessee 37831, USA

³Department of Physics, The University of Tennessee, Knoxville, Tennessee 37996, USA

⁴Donostia International Physics Center (DIPC), Manuel de Lardizabal, 4. 20018-Donostia, Spain (Received 15 April 2005; published 25 October 2005)

16 $\frac{dI}{dV} \propto |V|^{\alpha}$ (b) (a) 14 10 12 dI / dV (nA/V) dI/dV (nA/V) $\alpha = 0.6$ 10 8 $\rho(\varepsilon) \propto |\varepsilon - \varepsilon_F|^{\alpha}$ 6 2 -20 20 0 40 50 -40 10 Sample Bias (mV) Sample Bias (mV)

Luttinger-liquid behaviour in carbon nanotubes

Marc Bockrath*, David H. Cobden*, Jia Lu*, Andrew G. Rinzler†, Richard E. Smalley†, Leon Balents‡ & Paul L. McEuen*

* Department of Physics, University of California and Materials Sciences Division, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, California 94720, USA † Center for Nanoscale Science and Technology, Rice Quantum Institute and Department of Chemistry and Physics, MS-100, Rice University, PO Box 1892, Houston, Texas 77251, USA

‡ Institute for Theoretical Physics, University of California, Santa Barbara, California 93106-4030, USA

Direct observation of Tomonaga– Luttinger-liquid state in carbon nanotubes at low temperatures

Hiroyoshi Ishii¹, Hiromichi Kataura¹, Hidetsugu Shiozawa¹, Hideo Yoshioka², Hideo Otsubo¹, Yasuhiro Takayama¹, Tsuneaki Miyahara¹, Shinzo Suzuki¹, Yohji Achiba¹, Masashi Nakatake³, Takamasa Narimura⁴, Mitsuharu Higashiguchi⁵, Kenya Shimada⁶, Hirofumi Namatame⁶ & Masaki Taniguchi^{4,6}

¹Graduate School of Science, Tokyo Metropolitan University, Minami-Ohsawa 1-1, Hachioji, Tokyo 192-0397, Japan

²Department of Physics, Nara Women's University, Nara 630-8506, Japan ³Photon Factory, High Energy Accelerator Research Organization, Tsukuba 305-0801, Japan

⁴Graduate School of Science, ⁵Department of Physical Science, ⁶Hiroshima Synchrotron Radiation Center, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima, 739-8526, Japan



Nature 426, 540 (2003)

Atomically controlled quantum chains hosting a Tomonaga-Luttinger liquid

C. Blumenstein¹, J. Schäfer^{1*}, S. Mietke², S. Meyer¹, A. Dollinger¹, M. Lochner^{1,2}, X. Y. Cui³, L. Patthey³, R. Matzdorf² and R. Claessen¹



Electron liquids and solids in one dimension

Vikram V. Deshpande¹, Marc Bockrath², Leonid I. Glazman³ & Amir Yacoby⁴



Figure 3 | Probing spin-charge separation and charge fractionalization in interacting 1D wires using momentum-resolved tunnelling spectroscopy. a, Schematic structure of the double-wire geometry, made using the cleaved-edge overgrowth technique⁷. The double-wire system resides at the edge of a gallium arsenide/aluminium gallium arsenide double-well structure. Dark green, gates; blue, AlGaAs; white, GaAs; light green, 1D wire segments; transparent box, epitaxial confining layer on the cleaved edge. b, Schematic of circuit used to measure the spectral function and charge fractionalization. I_1 , left-moving current; I_p , right-moving current; V_{SD} , bias voltage. c, Measured spectral function, $\partial I(V, B)/\partial V$, indicating the spin and charge excitation branches (plotted versus injection energy, eV, on the horizontal axis). A smooth background has been subtracted from the data. The colour scale indicates the magnitude of $\partial I(V, B)/\partial V$ (arbitrary units). The features labelled spin and charge cross at zero energy at a magnetic field of around 7 T. d, Measured spin velocities (open symbols) and charge velocities (filled symbols) for different carrier densities (colours), plotted as the Fermi velocity, $v_{\rm E}$, divided by the measured velocity, v. A lower carrier density corresponds to stronger repulsion between electrons and hence to a larger charge excitation velocity. The spin modes are nearly independent of the carrier density. Solid curves are theoretical fits. (Panel reproduced from ref. 6.)

Referencias

- [1] E. Miranda, Brazilian J. Phys. 33, 3 (2003).
- [2] J. Voit, Rep. Prog. Phys. 57, 977 (1994).
- [3] J. von Delft and H. Schoeller, Ann. Phys. (Leipzig) 7, 225 (1998), cond-mat/9805275v3.
- [4] J. M. Luttinger, J. Math. Phys. 4, 1154 (1963).
- [5] F. D. M. Haldane, J. Phys. C 14, 2585 (1981).
- [6] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. 45, 1358 (1980).
- [7] H. J. Schulz, Int. J. Mod. Phys. B 5, 57 (1981).
- [8] J. Voit, J. Phys. C: Solid State Phys. 21, L1141 (1988).
- [9] T. Giamarchi and H. J. Schulz, Phys. Rev. B 39, 4620 (1989).
- [10] A. Luther and V. J. Emery, Phys. Rev. Lett. 33, 589 (1974).
- [11] Bosonization and strongly correlated systems, A. O. Gogolin, A. A. Nersesyan e A. M. Tsvelik (Cambridge, 1998).
- [12] Quantum field theory in condensed matter physics, A. M. Tsvelik (Cambridge, 1995).