**INTRODUCCIÓN A LA COSMOLOGÍA INFLACIONARIA**

Escuela de Física Teórica

Barranquilla – Colombia, 2015

César A. Valenzuela-Toledo – UniValle

---

1. Partiendo de las ecuaciones de Einstein
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu},$$
derive las ecuaciones de Friedmann. Utilice la métrica de FLRW:
$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right],$$
y las componentes del tensor de Ricci y el escalar de Ricci:
$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \qquad R_{ij} = \delta_{ij} \left[ 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2\frac{k}{a^2} \right], \qquad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right].$$
A partir de estas ecuaciones derive la ecuación de continuidad:
$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + P) = 0.$$

2. Utilice la ecuación de continuidad para mostrar que en un fluido con ecuación de estado $P = \omega\rho$, con $\omega \neq -1$ se tiene
$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)},$$
y (con ayuda de las ecuaciones de Friedmann)
$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}.$$
Con esta solución calcule el radio de Hubble $(aH)^{-1}$ y muestre que las dos siguientes cantidades crecen monotonamente con el tiempo:
$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} = \int_0^a d\ln a \left( \frac{1}{aH} \right), \qquad |\Omega - 1| = \frac{1}{(aH)^2}.$$

3. Determine las ecuaciones dinámicas en la aproximación de evolución lenta para un potencial de la forma:
$$V(\phi) \ = \frac{1}{4}\lambda\phi^4.$$

4. Muestre que mediante las transformaciones
$$t \to t + \alpha, \qquad x^i \to x^i + \delta^{ij}\beta'_j,$$
las perturbaciones escalares del elemento de línea
$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + 2aB_i \, dx^i dt + a^2 \left[ (1-2\Psi)\delta_{ij} + E_{ij} \right] dx^i dx^j,$$
transforman como:
$$\Phi \to \Phi - \dot{\alpha}, \quad B \to B + a^{-1}\alpha - a\dot{\beta}$$
$$E \to E - \beta, \quad \Psi \to \Psi + H\alpha.$$
Recuerde que:
$$E_{ij} = 2\partial_{ij}E + 2\partial_{(i}F_{j)} + h_{ij}, \quad \partial^i F_i = 0, \quad \partial^i h_{ij} = 0.$$

5. Usando las transformaciones anteriores y las transformaciones de las componentes del tensor de energía momento:

$$\delta\rho \to \delta\rho - \dot{\rho}\alpha, \quad p \to \delta p - \dot{p}\alpha, \quad \delta q \to \delta q + (\rho + p)\alpha,$$

muestre que las variables:

$$-\zeta \equiv \Psi + \frac{H}{\dot{\rho}}\delta\rho, \quad \mathcal{R} \equiv \Psi - \frac{H}{\rho + p}\delta q,$$

son invariantes de guage.

*Los comentarios y/o sugerencias respecto al cursillo son bienvenidos.*

**Contacto:** cesar.valenzuela@correounivalle.edu.co