Capítulo 14

Movimiento Periódico

UNIVERSIDAD DEL NORTE

ACREDITADA INSTITUCIONALMENTE POR SU EXCELENCIA ACADEMICA

UNIVERSIDAD DEL NORTE

"Vivimos en una sociedad profundamente dependiente de la ciencia y la tecnología y en la que nadie sabe nada de estos temas. Ello constituye una fórmula segura para el desastre."

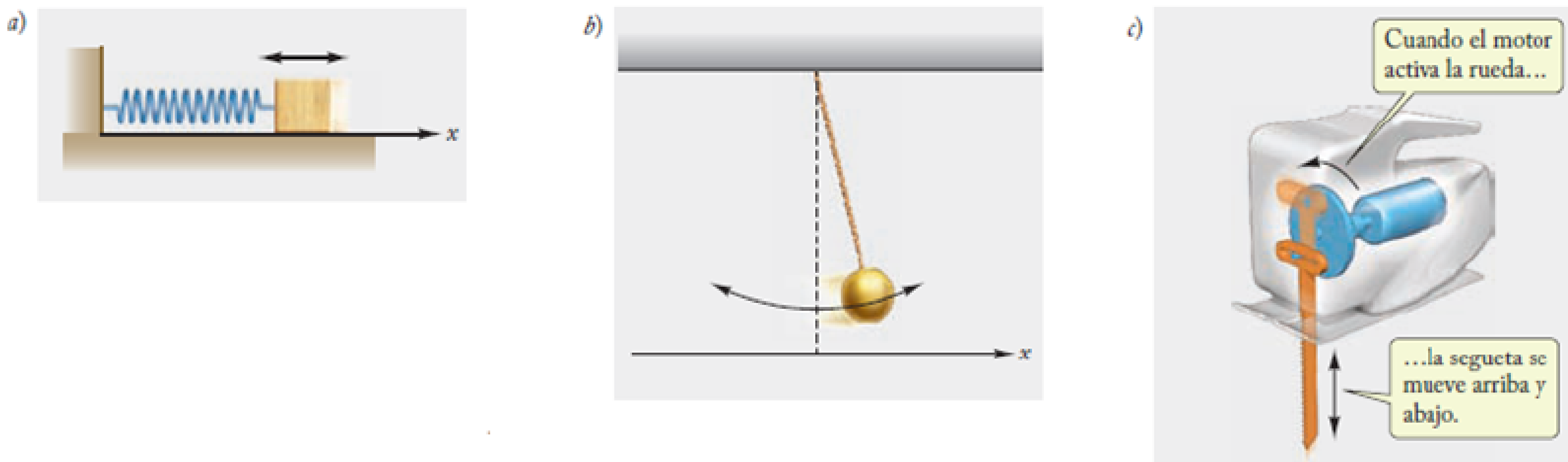
– *Carl Sagan*

Metas del Capítulo 13

- Describir el movimiento periódico.
- Interpretar las variables y ecuaciones del movimiento armonico simple.
- Relacionar la energía en el movimiento armonico simple.
- Estudiar el péndulo simple, el físico y movimientos combinados.
- Explorar las oscilaciones amortiguadas, forzadas y resonancia.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Movimiento armónico simple



El movimiento de una partícula que oscila de ida y vuelta en respuesta al empuje y jalón de un resorte es armónico simple

El movimiento de la lenteja de un péndulo es aproximadamente armónico simple

El movimiento de la segueta de una sierra caladora es armónico simple

Movimiento oscilatorio.

- Se presenta cuando un sistema físico se mueve a lado y lado de su posición de equilibrio estable por la acción de una fuerza de restitución o un momento de torsión restaurador.
- Cuando sobre el sistema solo actua la fuerza recuperadora o el momento recuperador se dice que las *oscilaciones son libres* y su movimiento puede describirse a partir de la conservación de la energía mecánica.
- Cuando además de la fuerza restauradora, estan presentes fuerzas disipativas, se dice que las oscilaciones son *libres y amortiguadas.* En cuyo caso la *amplitud* del movimiento (desplazamiento máximo medido a partir de la posición de equilibrio), disminuye con el tiempo
- Cuando además de las fuerzas restauradora y disipativas, actuan fuerzas externas para mantener el sistema en movimiento, entonces las oscilaciones se llaman *amortiguadas forzadas.*

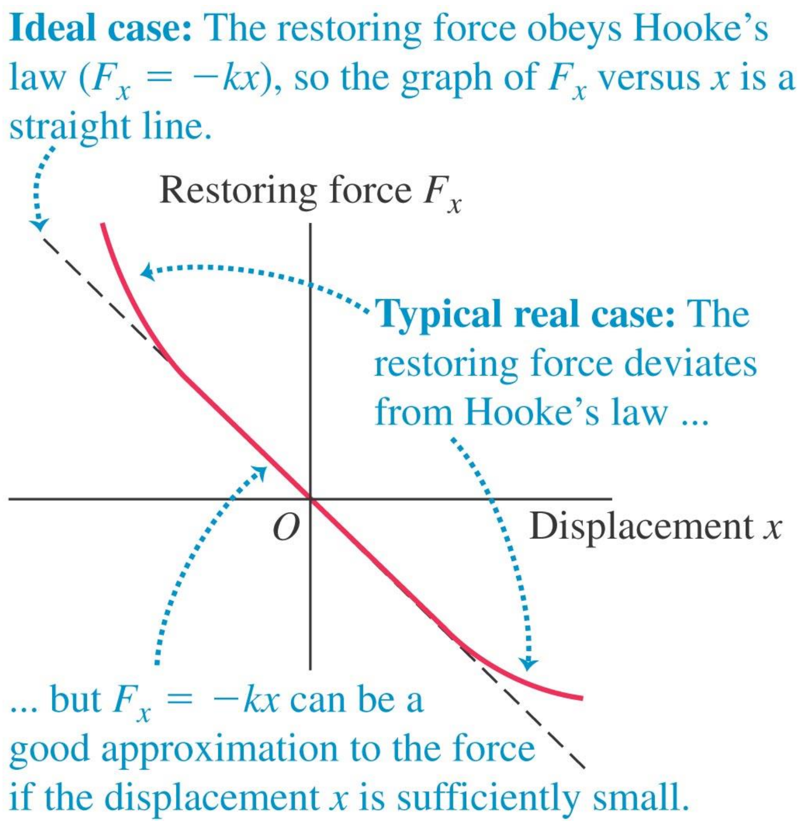
UNIVERSIDAD DEL NORTE

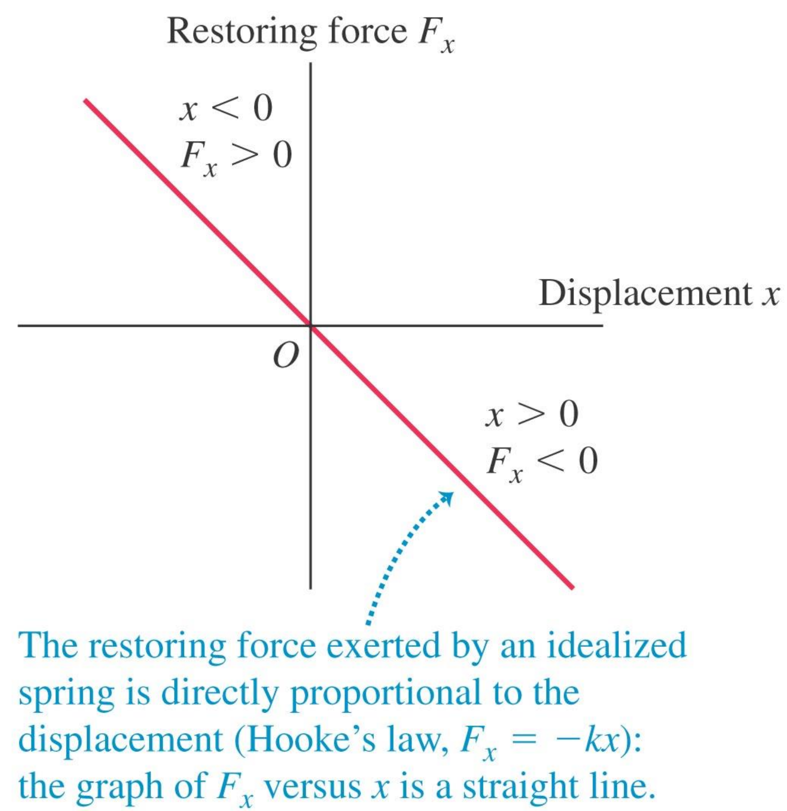
Definiciones básicas.

- Una oscilación es un viaje completo realizado por el sistema a partir de una posición dada.
- El tiempo que tarda el sistema en completar una oscilación se llama *periodo del movimiento* y se denota por T.
- El número de oscilaciones que ejecuta el sistema en la unidad de tiempo se define como la *frecuencia del movimiento* y se denota por f.
    - Claramente $f = 1/T$.
- Todo movimiento oscilatorio es periódico, pero no recíprocamente.
- Se asume en este estudio que las oscilaciones son de *pequeña amplitud*.
- Se estudiaran oscilaciones de sistemas con *un grado de libertad*.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

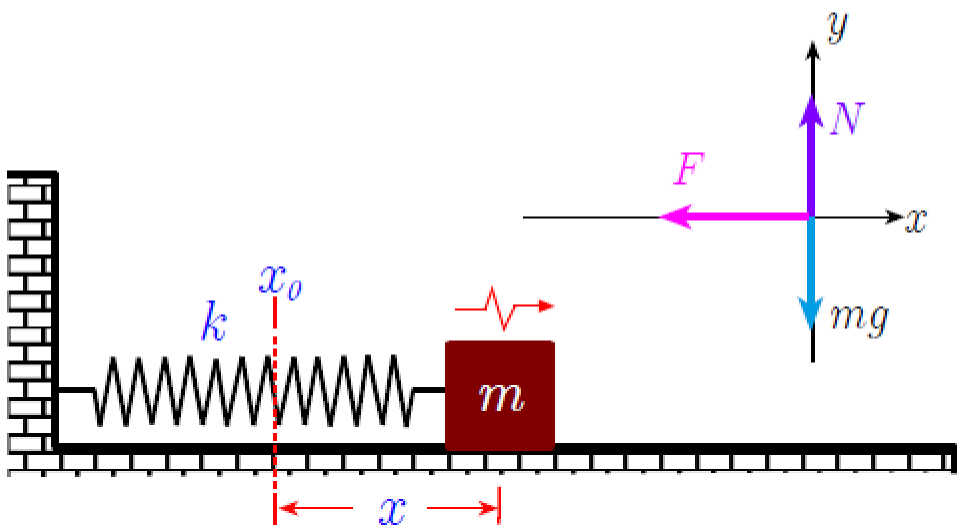
Movimiento armónico simple (m.a.s)





Oscilaciones libres (m.a.s)

- Ejemplo1: Masa puntual unida al extremo libre de un resorte *ideal*.



- Ecuación de movimiento

$$-kx = ma \iff \ddot{x} = -\omega_0^2 x \iff \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Solución de la ecuación diferencial

- De demuestra (ejercicio propuesto) que

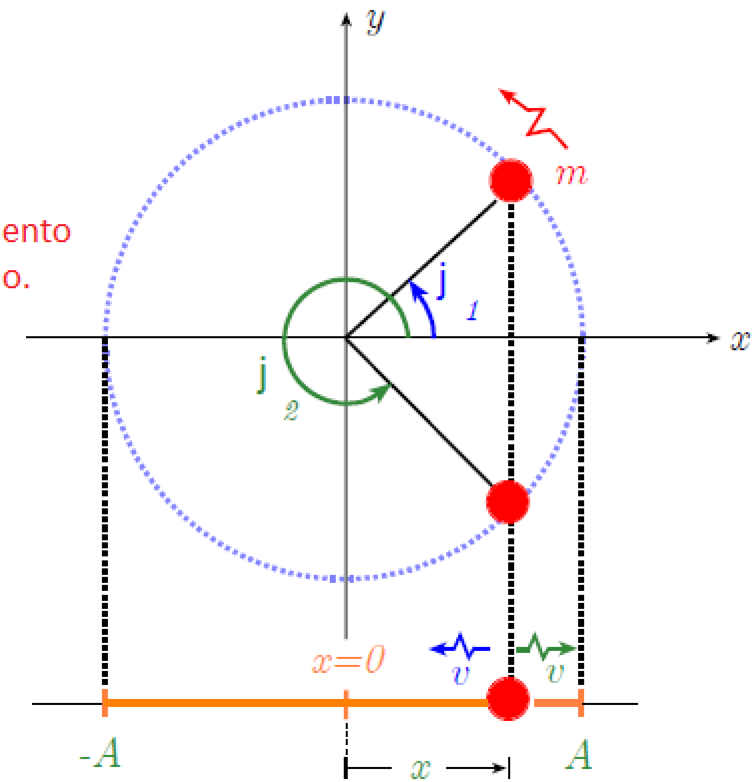
$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{2}$$

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{3}$$

  son soluciones para (1) y que además, cualquier combinación lineal de (2) y (3) es también solución. En este curso se usará (2).
- Significado físico de los parámetros que aparecen las ecuaciones (2) y (3)
  - A_0 es la amplitud del movimiento
  - φ es el ángulo de fase
  - A y φ quedan unívocamente determinados por las condiciones iniciales, esto es $x(0) \equiv x_0$ y $v(0) \equiv v_0$.

Ilustración grafica.

El m.a.s no es un movimiento uniformemente acelerado.

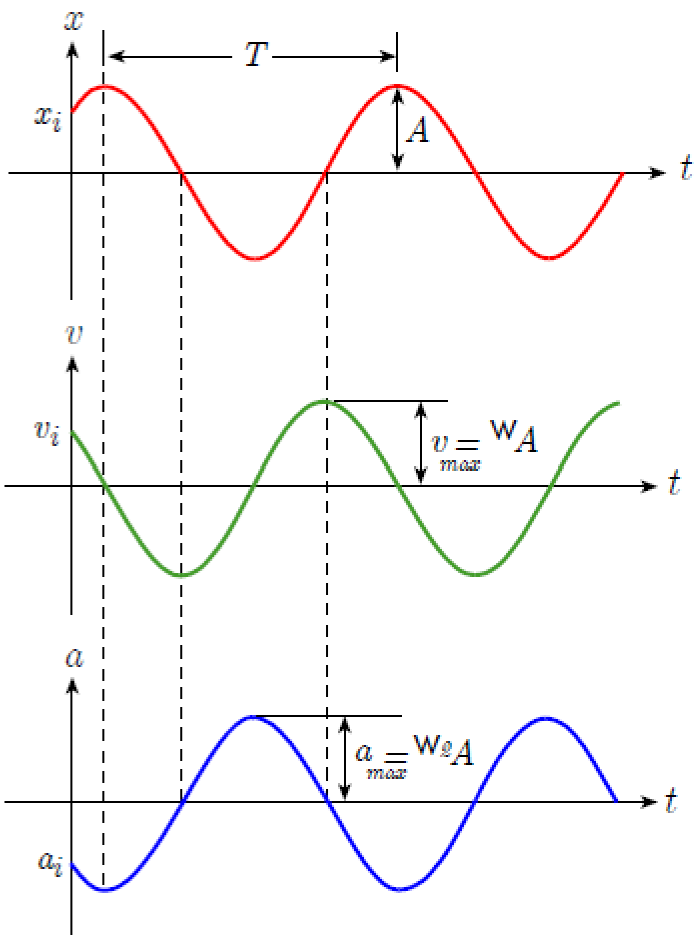


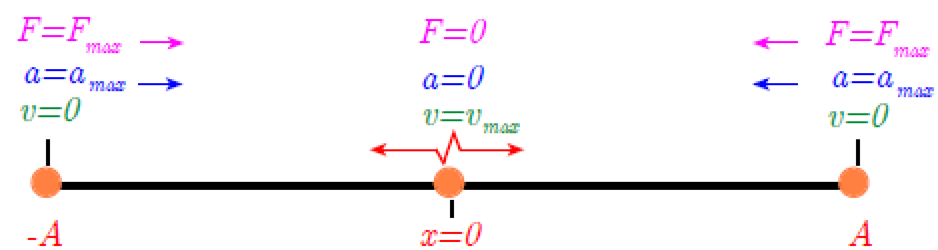
- La velocidad y la aceleración en el $m.a.s$ estan dadas por

$$v(t) = -A_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Longrightarrow v_{\text{máx}} = |-A_0\omega_0|$$

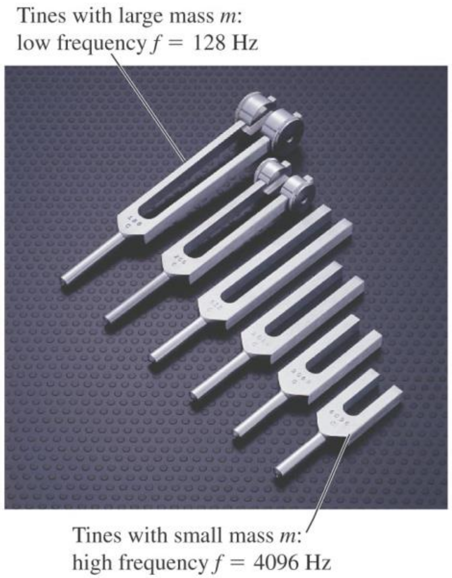
$$a(t) = -A_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t) \Longrightarrow a_{\text{máx}} = |-A_0\omega_0^2|$$

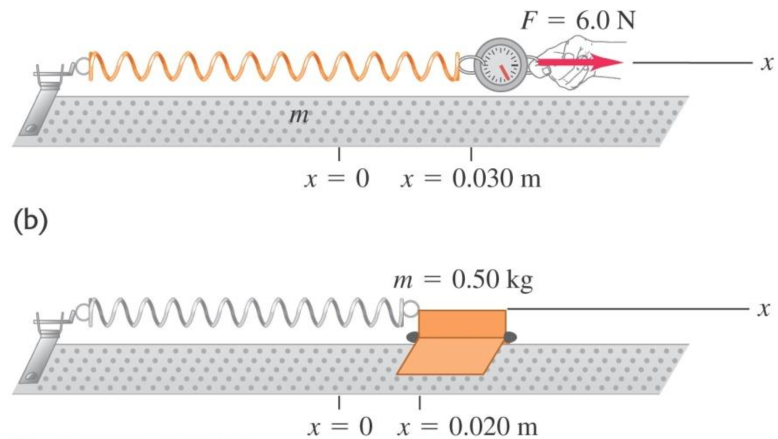
Ilustración grafica.



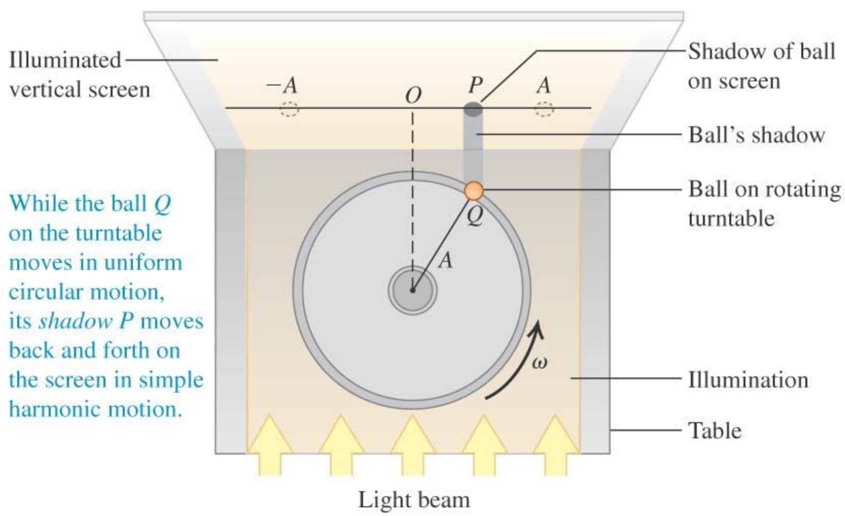


Características (m.a.s)

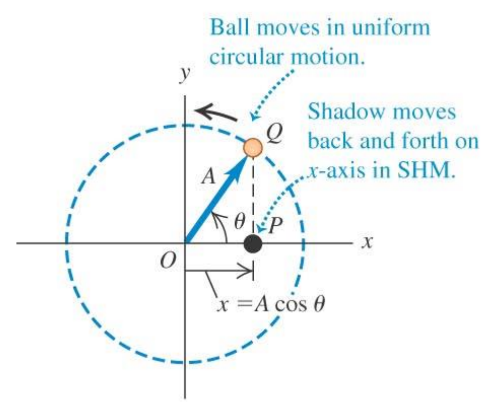




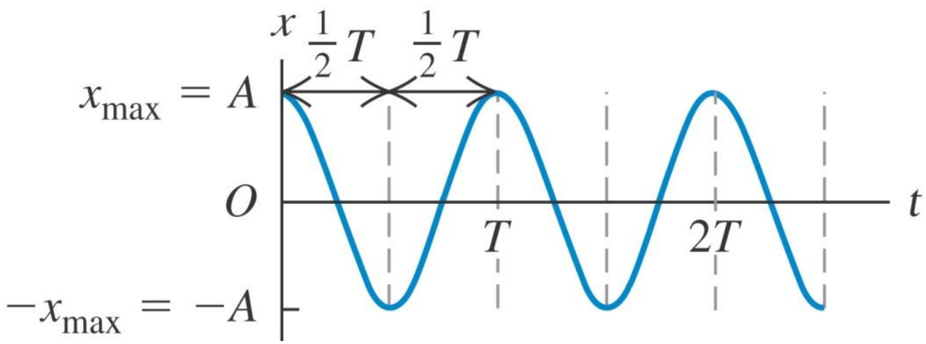
(a) Apparatus for creating the reference circle

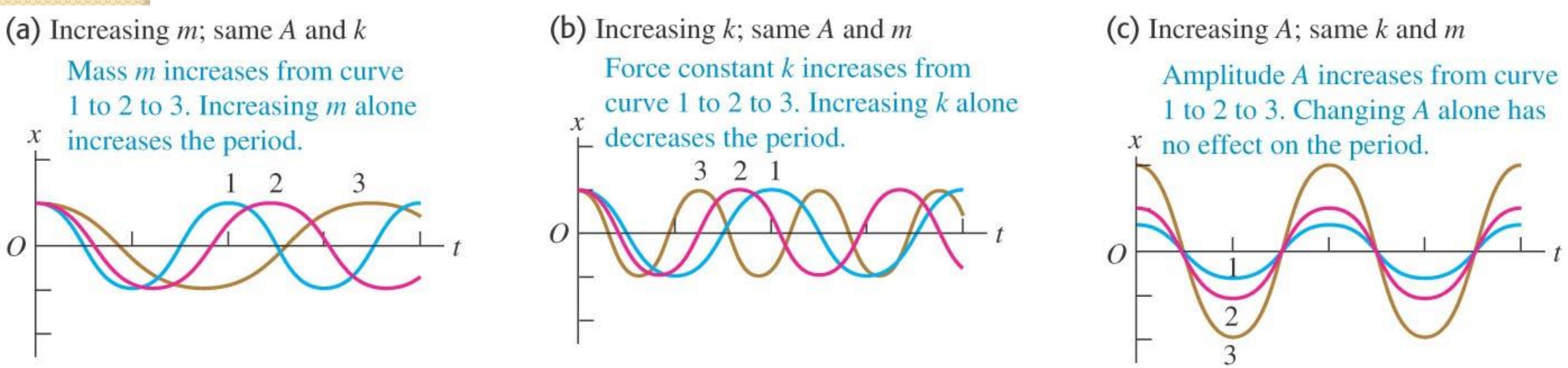


(b) An abstract representation of the motion in (a)



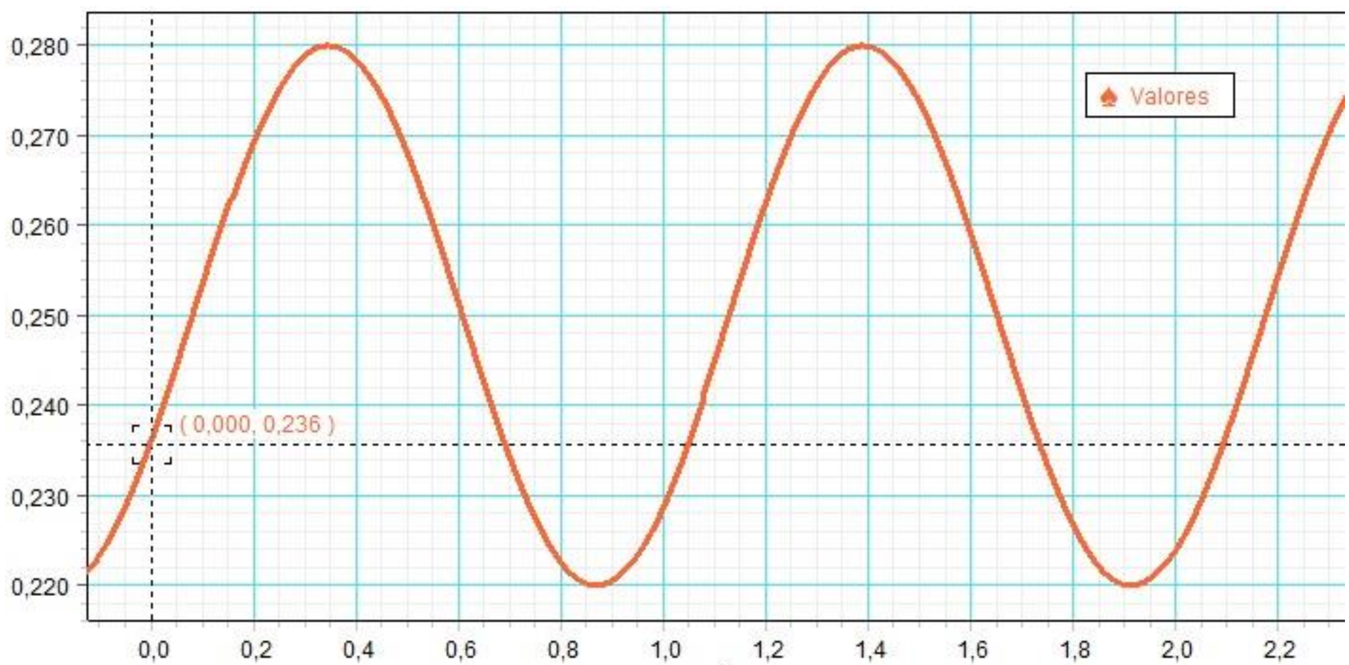
x versus t





UNIVERSIDAD DEL NORTE

Ejercicio.
Dada la siguiente gráfica, determine la ecuación de posición para este caso.



El m.a.s y la conservación de la energía

- Todo sistema que exhibe un *m.a.s* es conservativo.
- La energía cinética en el m.a.s está dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(-A_0\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right)^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) \geq 0$$

- La energía potencial en el m.a.s está dada por

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(A_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right)^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) \geq 0$$

- La energía mecánica en el m.a.s está dada por

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA_0^2\left[\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}kA_0^2 \text{ : Constante.}$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

- Energy is conserved during SHM and the forms (potential and kinetic) interconvert as the position of the object in motion changes.

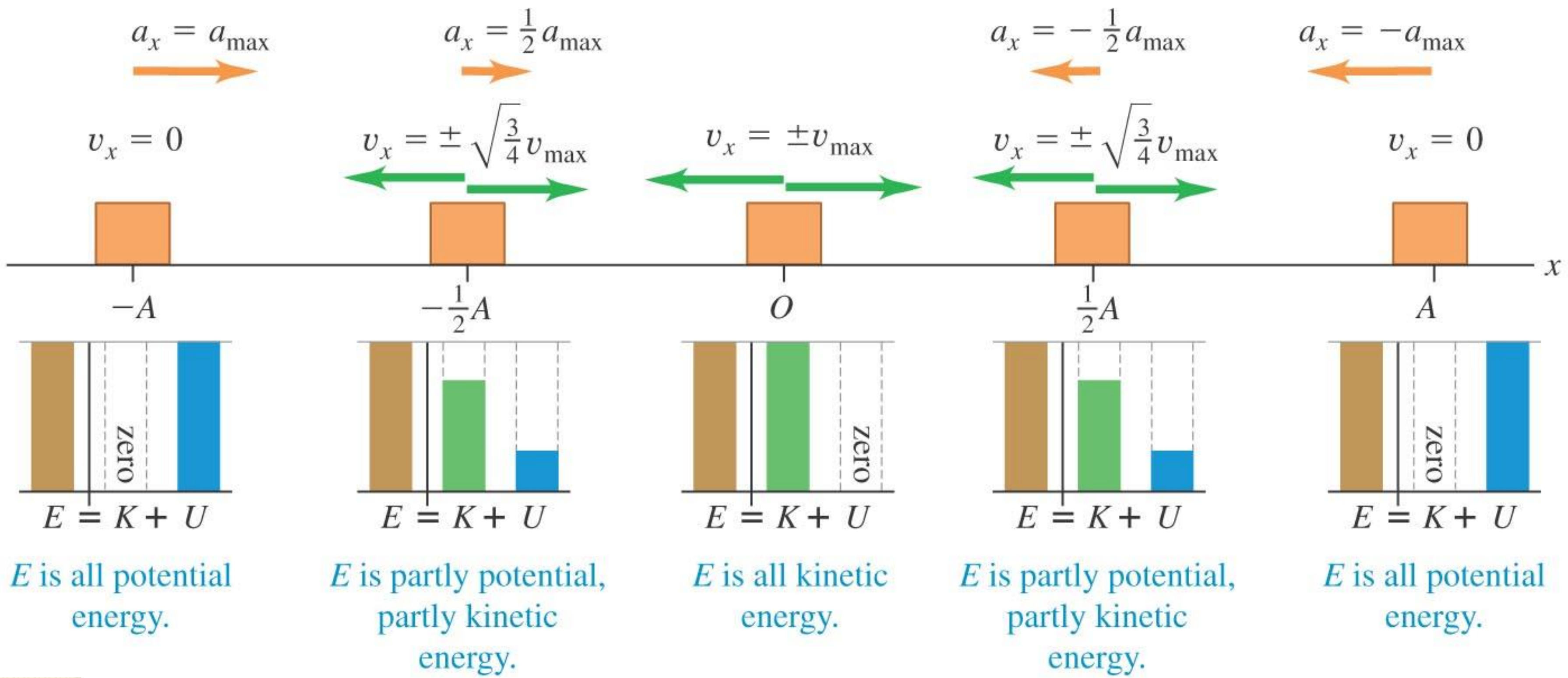
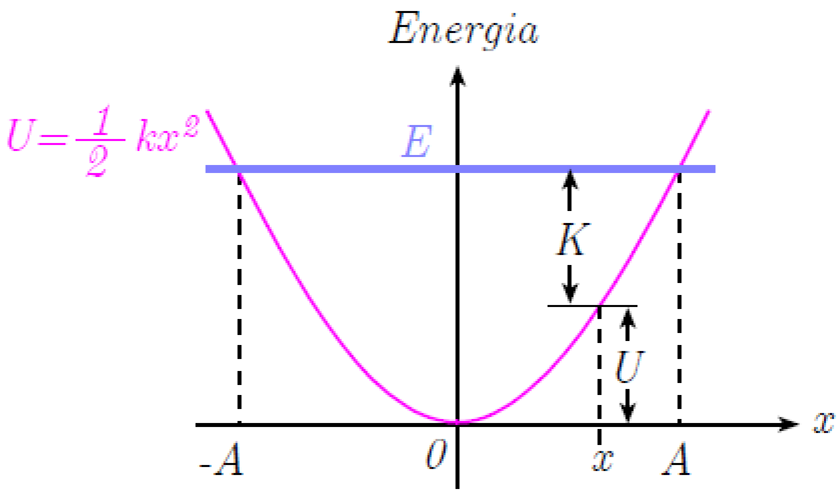
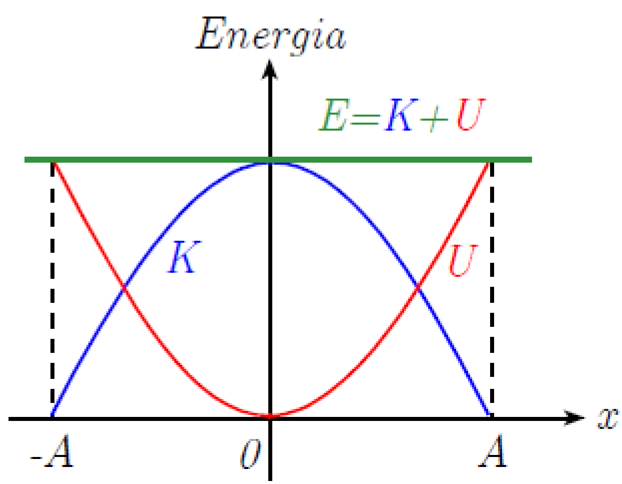
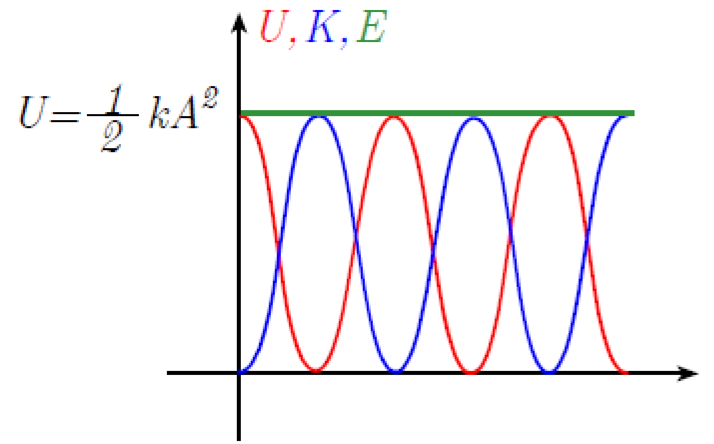


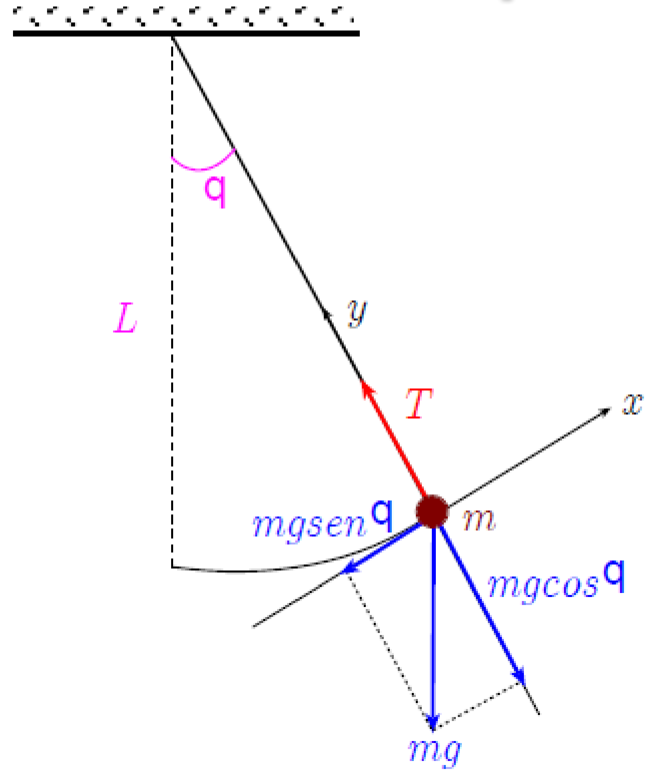
Ilustración grafica.







Péndulo simple.



De la figura

$$\boxed{\begin{array}{c} -mg\sin\theta = ma_t \Longleftrightarrow -g\sin\theta = L\alpha \Longleftrightarrow -g\sin\theta = L\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\ -\dfrac{g}{L}\sin\theta = \ddot{\theta} \end{array}}$$

- Recuérdese que

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...$$

- De modo que cuando

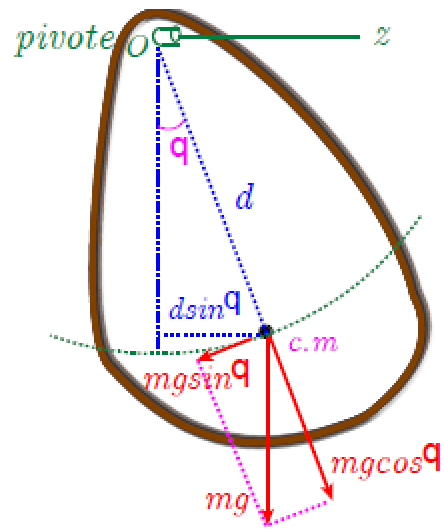
$$\theta \ll 1\, rad \Longrightarrow \sin\theta \approx \theta \qquad (4)$$

- De acuerdo con lo anterior

$$-\frac{g}{L}\theta = \ddot{\theta},\ \text{si}\ \omega_0^2 = \frac{g}{L} \Longrightarrow \ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta \Longleftrightarrow$$

- El péndulo simple es un oscilador armónico.
- La consideración descrtita por (4) es equivalente a decir que se supone que las *oscilaciones del sistema son de pequeña amplitud.*

Péndulo físico.



- De la figura

$$\tau_n = \tau_{mg} = -mgd\perp = I_0\alpha \Longleftrightarrow -mgd\perp = I_0\,\ddot{\theta}$$

- O bien,

$$-mgd\sin\theta = I_0\,\ddot{\theta}$$

- Para oscilaciones de pequeña amplitud

$$\sin\theta \approx \theta$$

- Por lo tanto

$$-mgd\theta = I_0\,\ddot{\theta} \Longleftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I_0}\,\theta$$

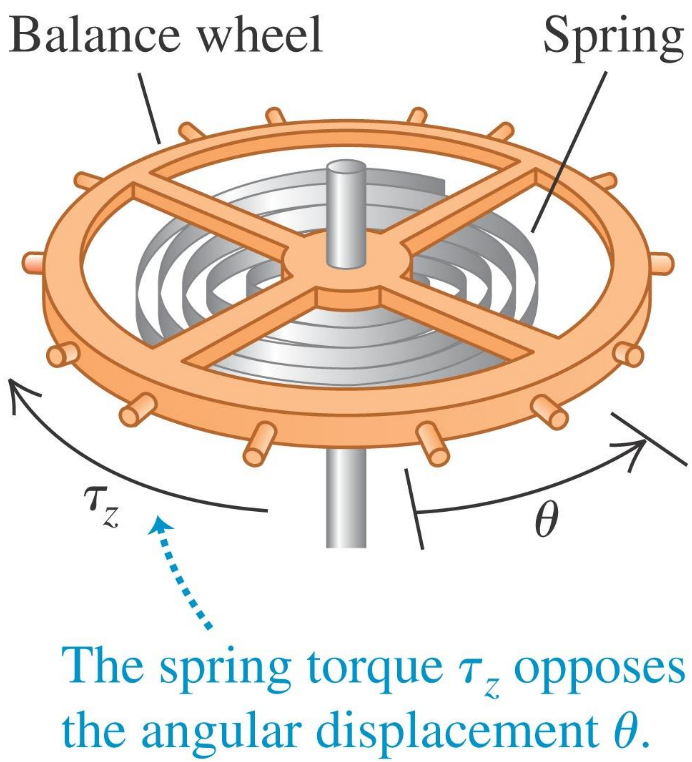
- Si $\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_0}$, entonces

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\,\theta \Longleftrightarrow$$

El péndulo físico es un oscilador armónico.

M.a.s angular.

- Watches keep time based on regular oscillations of a balance wheel initially set in motion by a spring.



Frecuencias y periodos para los osciladores armónicos estudiados.

Se demuestra que el $m.a.s$ es equivalente a la proyección sobre alguno de los ejes coordenados (x o y) de un movimiento circular uniforme, por lo tanto

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

y se tiene entonces que:

- **Para el bloque unido al extremo libre de un resorte ideal**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- **Para el péndulo simple**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{y} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- **Para el péndulo físico**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I_0}} \quad \text{y} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgd}}$$

- Ecuación de movimiento.

$$-f_b - F_R = ma \Longleftrightarrow -bv - kx = m\,a$$

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

- Si $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, entonces

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \omega_0^2 x \Longleftrightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ecuación diferencial que describe las oscilaciones amortiguadas $E.D.$ de las $O.A.$

- Se demuestra (ejercicio propuesto) que la solución para la $E.D$ de las $O.A$ está dada por

$$x\,(t) = A_0 e^{-\alpha t}\cos\left(\omega_a t + \varphi\right)$$

siempre y cuando:

$$\alpha = \frac{b}{2m} \text{ y } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2},$$

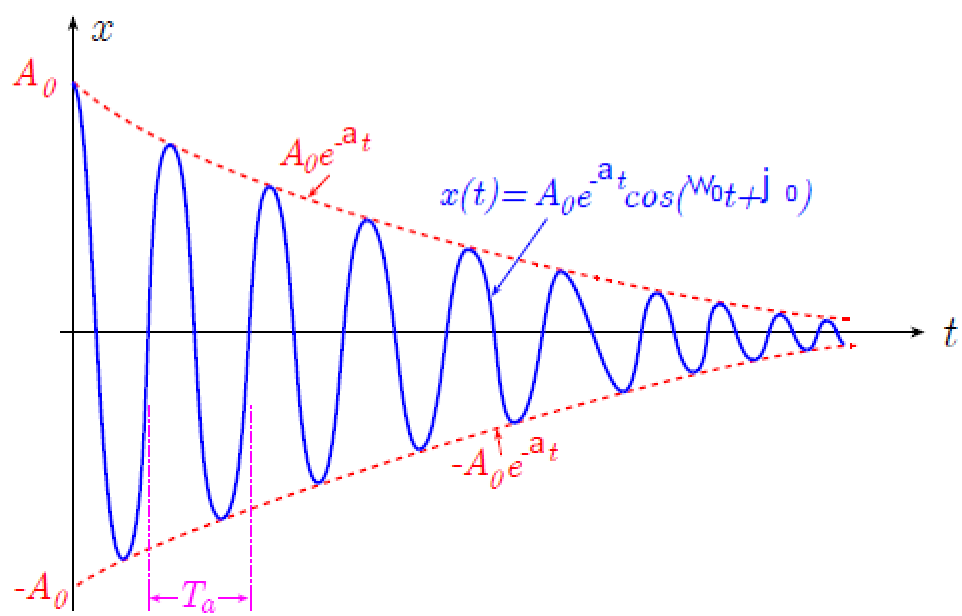
α es el *coeficiente de amortiguamiento*.y se expresa en Hertz (Hz)

Clasificación oscilaciones amortiguadas.

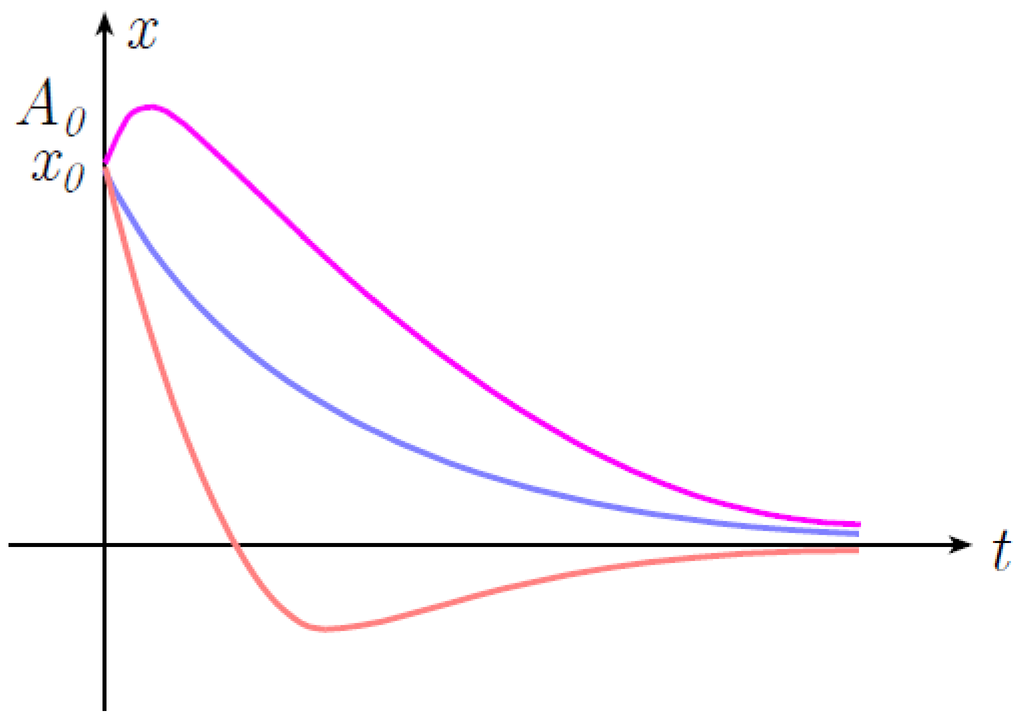
- Cuando se deriva $\omega_a(b)$ y el resultado se igula a cero se obtiene el denominado el b *crítico*, el cual está dado por:

$$b_c = \sqrt{4mk} \quad \text{(ejercicio propuesto)}$$

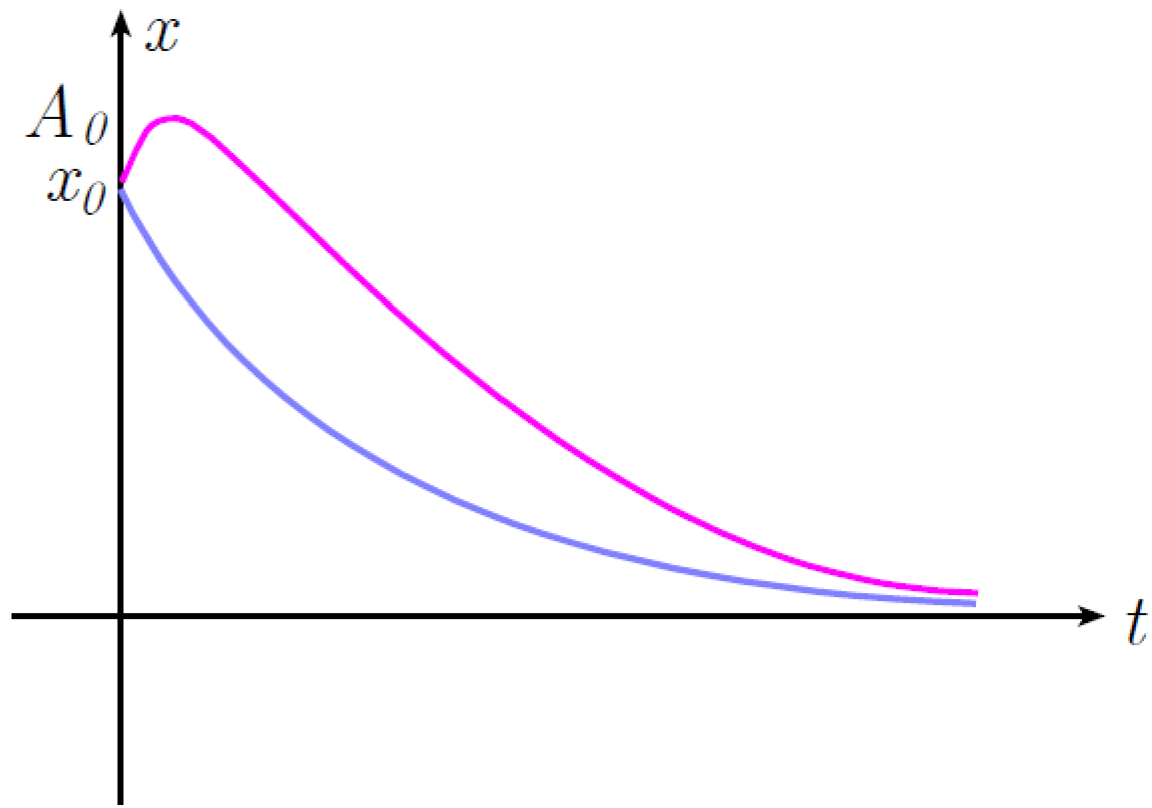
- Si $b < b_c$, entonces las oscilaciones se llaman *subamortiguadas*
- Ilustración gráfica



- Si $b = b_c$, entonces las oscilaciones se llaman *críticamente amortiguadas*.
- Ilustración gráfica

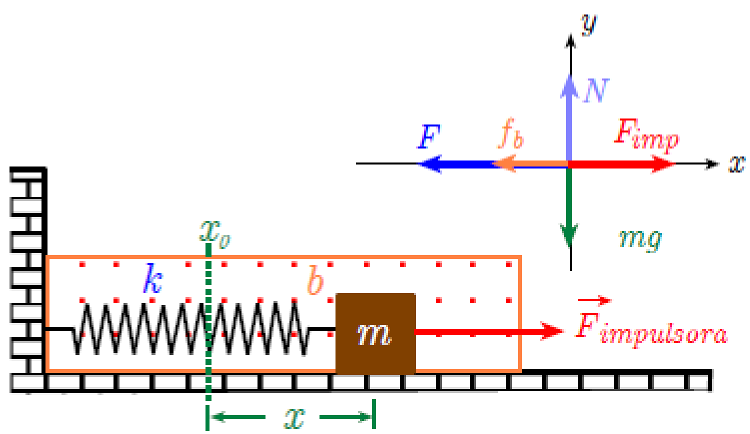


- Si $b > b_c$, entonces las oscilaciones se llaman *sobremortiguadas*.
- Ilustración gráfica



Oscilaciones amortiguadas forzadas.

- Caracterización: Ocurren cuando además de las fuerzas restauradora y disipativas, actuan fuerzas externas para mantener el sistema en movimiento.
- Ilustración gráfica:



- En la figura:
  - $\vec{f}_f = -b\,\vec{v}$: representa la fuerza disipativa, (ley de Stokes). b es la constante de amortiguamiento.

- Ecuación de movimiento.

$$F - f_f - F_R = ma \Longleftrightarrow F_0 \cos \omega_F t - bv - kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_F t$$

- Si $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, entonces:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_F t$$

  Ecuación diferencial que describe las oscilaciones amortiguadas $E.D.$ de las $O.A.F$

- Se demuestra que la solución para la$E.D$ de las$O.A.F$ está dada por:

$$x(t) = \boxed{A_0 e^{-\alpha t}} \cos(\omega_a t + \varphi) + A_F \cos(\omega_F t + \varphi_F)$$

  - El primer término describe el *estado transitorio*.
  - El segundo término describe el *estado estacionario*.

Resonancia.

- El factor A_F se denomina la Amplitud de las oscilaciones forzadas y está dado por:

$$\boxed{A_F = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega_F^2\right)^2 + \left(b\omega_F\right)^2}}}$$

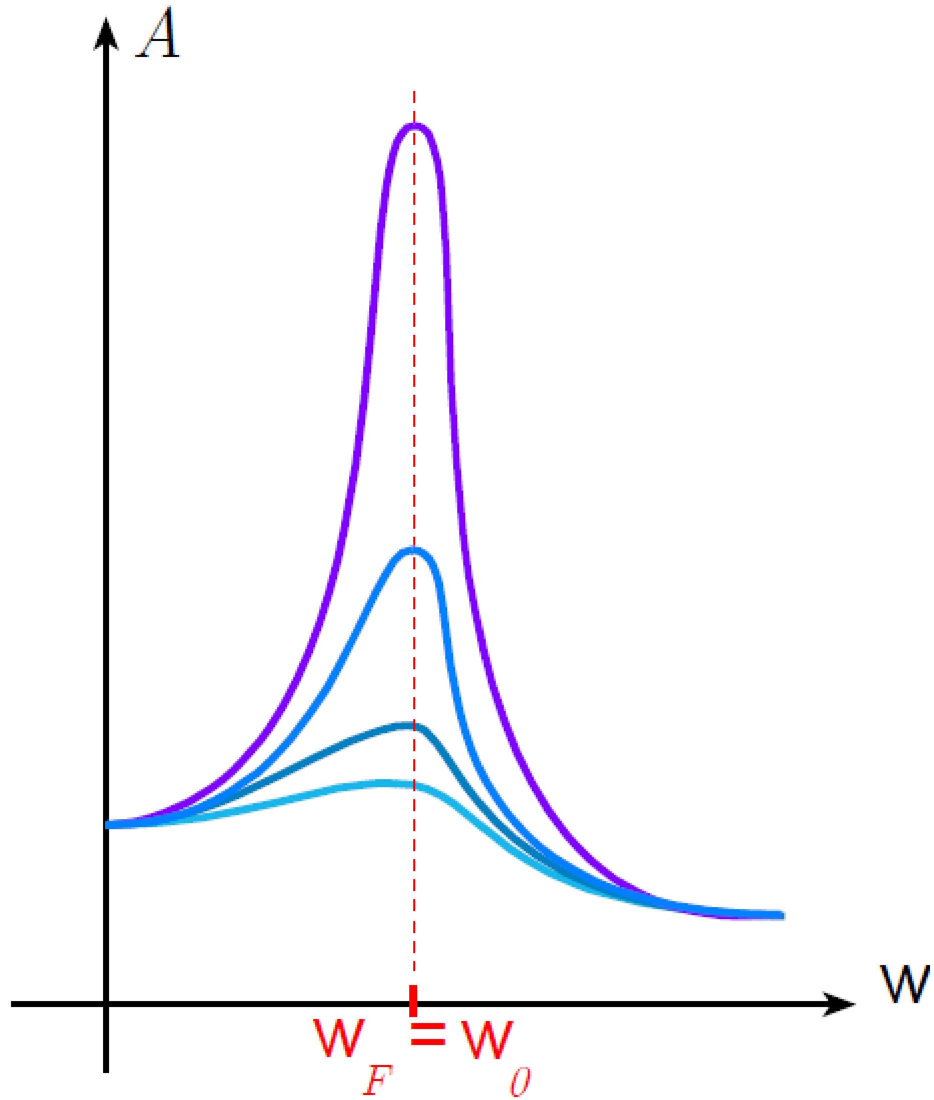
- El parámetro φ_F se denomina constante de fase para las oscilaciones forzadas y está dado por:

$$\varphi_F = \tan^{-1}\frac{b\omega_F}{m\left(\omega_0^2 - \omega_F^2\right)}$$

- Nótese que cuando $\omega_F \approx \omega_0$, para un $b \ll$ fijo, entonces A_F crece indefinidamente, a este comportamiento se le conoce como *resonancia*

UNIVERSIDAD DEL NORTE

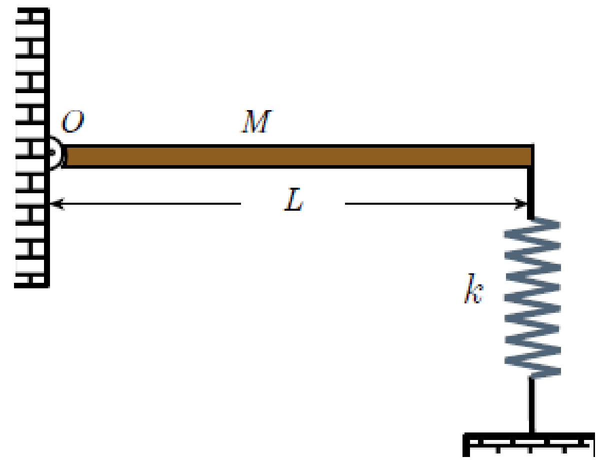
Ilustración grafica Resonancia.



EJERCICIOS.

- *Ejercicio 1.*
  Demuestre que el sistema masa+resorte, aún cuando sus oscilaciones sean verticales,.es un oscilador armónico.

- *Ejercicio 2*

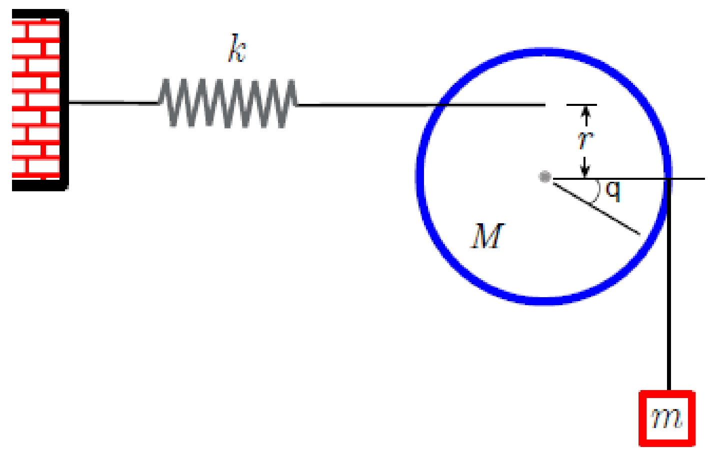


Considere el sistema mostrado en la figura en el cual una varilla está articulada por un gozne en el punto O y sostenida por un resorte ideal de constante de fuerza k en el otro extremo. Demuestre que para pequeños desplazamientos verticales alrededor de su posición de

UNIVERSIDAD DEL NORTE

equilibrio estable, la varilla en cuestión se mueve exhibiendo un $m.a.s$, alrededor de un eje que pasa por O y que es perpendicular al plano de giro. Determine además el periodo de su movimiento.

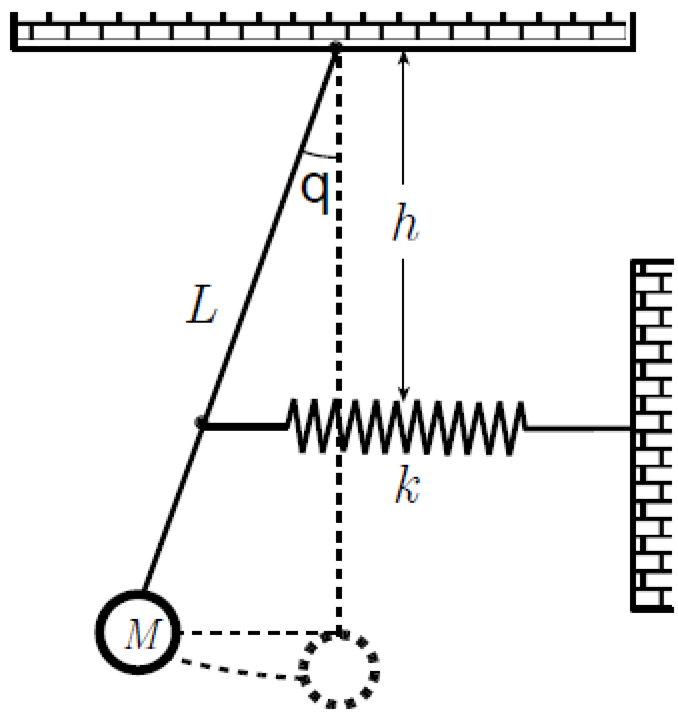
- *Ejercicio 3*



La polea hogénea de la figura tiene masa M y radio R y de ella está suspendida una masa puntual m. La polea puede rotar debido a la acción de un resorte que está unido a ella a una distancia r del centro. Si el sistema está libre de efectos disipativos y m se desplaza a partir de su posición de equilibrio estable hacia abajo, demuestre que el sistema se mueve describiendo un $m.a.s$ y determine la frecuencia f de movimiento.

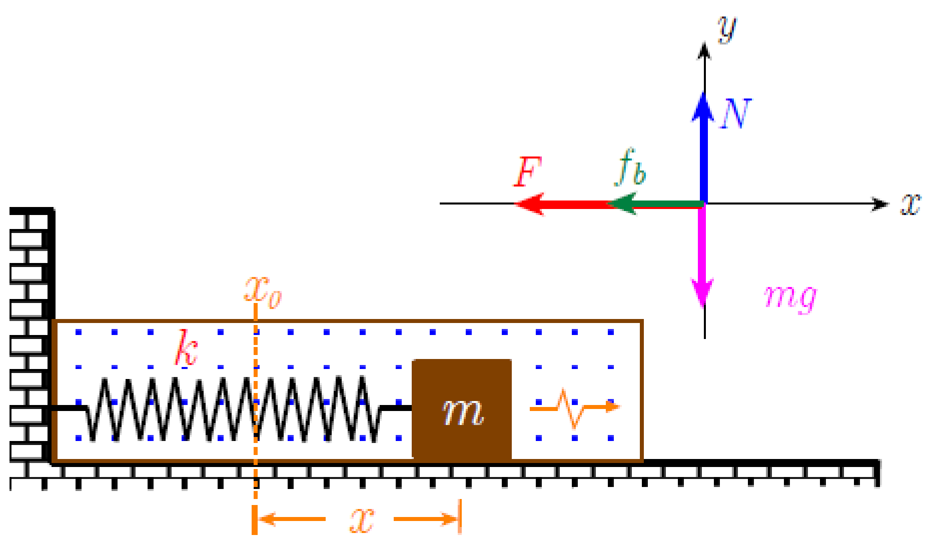
- *Ejercicio 4*

Un péndulo de longitud L y masa M tiene conectado un resorte de constante de fuerza k a una distancia h por debajo del punto de suspensión, como se muestra en la figura. Determine la frecuencia de vibración del sistema, suponiendo que este describe oscilaciones de pequeña la amplitud. (Suponga que el soporte vertical, de longitud L, es rígido, y de masa despreciable).



Oscilaciones amortiguadas.

- Caracterización: Se presentan cuando además de la fuerza restauradora, estan presentes fuerzas disipativas. En este caso la *amplitud* del movimiento, disminuye con el tiempo
- Ilustración gráfica



- En la figura $\vec{f}_b = -b\,\vec{v}$: representa la fuerza disipativa, modelada por la ley de Stokes. b: constante de amortiguamiento.

EJERCICIOS.

- *Ejercicio 1*
  Un fabricante de autos desea instalar en ellos amortiguadores que *reduzcan la amplitud de las oscilaciones verticales de la carrocería a un décimo del valor inicial, después de un ciclo de oscilación*. Los resortes utilizados son helicoidales, ideales con una constante de fuerza de $24000N/m$. La masa del auto es de $1500kg$, y está distribuida equitativamente etre las cuatro ruedas, cada una de las cuales está suspendida de un resorte idéntico. Suponiendo que el resorte y el amortiguador se comporten como un oscilador armónico amortiguado ideal, determine: **a)** la frecuencia de oscilación del auto sobre sus resortes antes de instalar los amortiguadores, **b)** el parámetro o coeficiente de amortiguamiento α necesario para cada uno de los cuatros aparatos de manera que puedan alcanzarse los objetivos del fabricante, **c)** la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas que se presentan cuando se montan los amortiguadores.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

- *Ejercicio 2*
  Un resorte ideal de constante de fuerza k y una masa m unida a su extremo libre oscilan en un medio viscoso. El primer máximo de las oscilaciones es de $5cm$ y se observa cuando $t = 2s$. Si el segundo máximo consecutivo se observa cuando $t = 3s$, y es de $4{,}9cm$, escriba la ecuación para las oscilaciones subamortiguadas de m como una función del tiempo.
- *Ejercicio 3.*
  Un bloque de $1{,}5kg$ de masa, se suspende de un resorte ideal que cuando es sometido a una fuerza de $2N$ se alarga $2cm$. Se pone a oscilar el bloque y durante su movimiento experimenta una fuerza de fricción del tipo *ley de Stokes* ($\vec{f} = -b\vec{v}$), de manera que cuando la rapidez del bloque es de $1cm/s$, la magnitud de la fuerza referida es $0{,}2N$. Si en el instante inicial el resorte está alargado $10cm$ por debajo de su posición de equilibrio y el bloque se libera desde el reposo: **a)** Determine si el sistema descrito anteriormente es sub, crítica o sobreamortiguado. **b)** Escriba la ecuación de movimiento para dicho sistema