GUIA DE CALIFICACIÓN Y SOLUCIÓN EXAMEN FINAL DE CALCULO I 2018-10

1. **Dada la función $f(x) = x^3(8-3x)$ hallar:**

   a. **(1 pto.) Puntos críticos.**

   $Dom\, f = \mathbb{R}.\ \ f(x) = -3x^4 + 8x^3 \Longrightarrow f'(x) = -12x^3 + 24x^2.\ \ f'(x)\ existe\ en\ todo\ el\ dominio.$

   $Si\ f'(x) = 0 \Longrightarrow -12x^3 + 24x^2 = 0 \ \Longrightarrow\ x = 0\ y\ x = 2\ son\ puntos\ críticos$

   - Deriva correctamente la función...0.5 puntos
   - Deriva correctamente y halla todos los puntos críticos ....1.0 punto

   b. **(1.5 ptos.) Intervalos donde la función crece o decrece y extremos relativos si los hay.**

Int	$f'(x)$	$f(x)$	$Extremos$
$(-\infty, 0)$	$+$	$crece$	
$(0,2)$	$+$	$crece$	$En\ x = 2\ hay\ \max relativo$
$(2, \infty)$	$-$	$decrece$	$f(2) = 16$

   - Analiza correctamente el comportamiento de $f(x)$ en cada uno de los intervalos....... 1 punto
   - Hace bien lo anterior y obtiene correctamente el extremo relativo ....1.5 puntos

   c. **(1.5 ptos) Intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo y puntos de inflexión si los hay.**

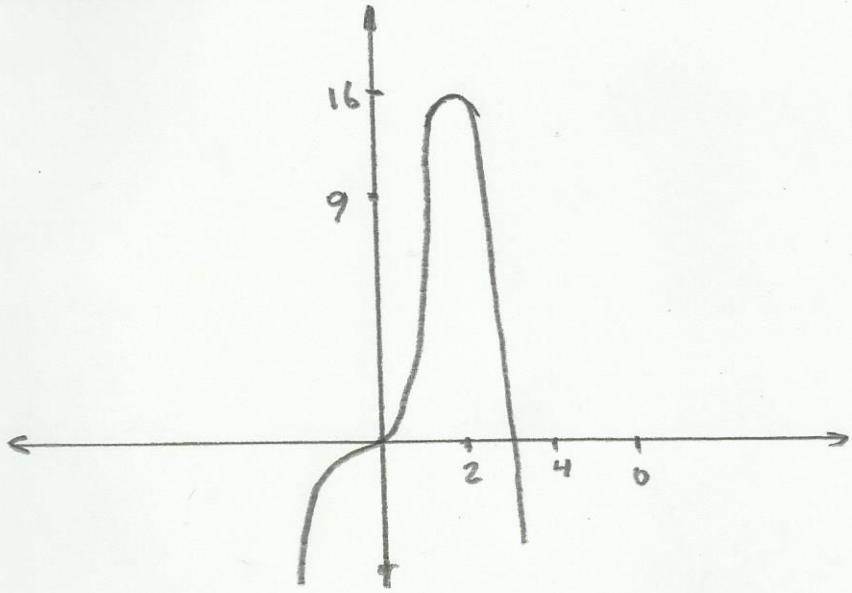
   $f''(x) = 48x - 36x^2.\ \ f''(x)\ existe\ en\ todos\ los\ puntos\ del\ dominio.$

   $Si\ f''(x) = 0 \ \Longrightarrow\ 48x - 36x^2 = 0 \ \Longrightarrow x = 0\ y\ x = \frac{4}{3}\ \ son\ candidatos\ a\ puntos\ de\ inflexión$

Int	$f''(x)$	$f(x)$	$Inflexión$
$(-\infty, 0)$	$-$	$Conc\ abajo$	$En\ x = 0\ ocurre\ un\ pto\ de\ inflex\ f(0) = 0$
$(0, {}^4/_3)$	$+$	$Conc\ arriba$	$En\ x = \frac{4}{3}\ ocurre\ un\ pto\ de\ inflexión\ f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27} \cong 9.4$
$({}^4/_3, \infty)$	$-$	$Conc\ abajo$	

   - Obtiene sin errores a $f''(x)$ y obtiene de manera correcta los posibles puntos de inflexión.. 0.5 puntos
   - Hace bien lo anterior , analiza sin errores el comportamiento de $f(x)$ en cuanto a concavidades y obtiene correctamente los puntos de inflexión...1.5 puntos.

   d. **(1 pto) Trazar la gráfica de la función con base a los resultados de los incisos a), b) y c)**

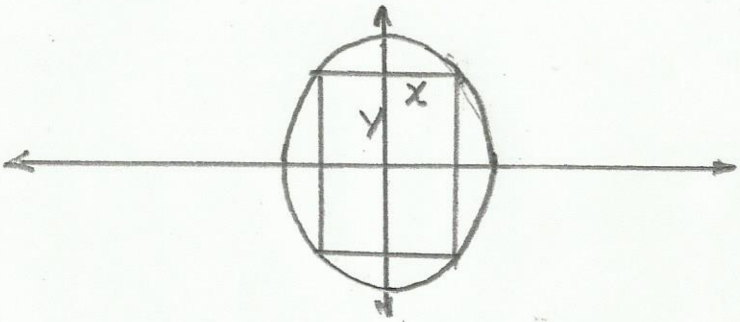


   - El esbozo de la gráfica que traza corresponde a los resultados hallados..... 1 punto.

2. Calcular el área del mayor rectángulo que pueda inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

En su desarrollo incluir un argumento que justifique porqué su respuesta produce el área máxima



$A(x,y)=4xy, pero\ y=\dfrac{3\sqrt{4-x^2}}{2}\Rightarrow$

$A(x)=6x\sqrt{4-x^2}.\ De\ acuerdo\ al\ contexto\ 0\le x\le 2$

$A'(x)=6\left[\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right]$

$Si\ A'(x)=0\Longrightarrow x=\mp\sqrt{2}.\ Escogemos\ x=\sqrt{2}.$

- Un argumento para justificar que en el punto hallado la función A es máxima es el siguiente

$Como\ A(x)=6x\sqrt{4-x^2}\ es\ continua\ en\ [0,2]\Longrightarrow A\ alcanza\ el\ máximo\ y\ el\ mínimo\ en\ [0,2]$

$\sqrt{2}\in[0,2]$

$Como\ A(0)=0, A(2)=0\ y\ A(\sqrt{2})=12$

Se concluye que $para\ x=\sqrt{2}\ \ la\ función\ A(x)=6x\sqrt{4-x^2}\ que\ calcula\ el\ área\ del\ rectángulo\ inscrito\ en\ la\ elipse\ \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1\ es\ máxima\ y\ que\ el\ área\ de\ ese\ rectángulo\ es\ 12\ unidades\ cuadradas$

- Otro argumento es calcular la segunda derivada

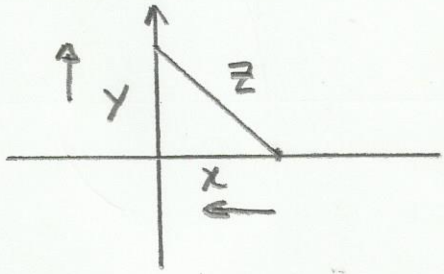
$A''(x)=6\left[\dfrac{2x^3-12x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\Longrightarrow A''(\sqrt{2})=-24$

Se concluye que $para\ x=\sqrt{2}\ \ la\ función\ A(x)=6x\sqrt{4-x^2}\ que\ calcula\ el\ área\ del\ rectángulo\ inscrito\ en\ la\ elipse\ \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1\ es\ máxima\ y\ que\ el\ área\ de\ ese\ rectángulo\ es\ 12\ unidades\ cuadradas$

- Construye una función área que calcula el área del rectángulo inscrito en la elipse......2 puntos
- Hace bien lo anterior , deriva correctamente y halla un valor critico ....4 puntos.
- Hace bien los dos pasos anteriores y argumenta correctamente que para el valor critico hallado la función es máxima ....5 puntos.

3. Un automóvil se desplaza a una velocidad de $20\,pies/seg$ y se aproxima a un cruce. Cuando el automóvil está a $100\,pies$ del cruce, un camión que viaja a una velocidad de $10\,pies/seg$ pasa por el cruce. El automóvil y el camión se encuentran sobre carreteras que son perpendiculares. ¿Qué tan rápido se separan o se acercan el automóvil y el camión $3\,segundos$ después de que el camión deja el cruce?

Identificamos y simbolizamos las razones de cambio dadas y pedida de acuerdo a la interpretación grafica del problema.



$\frac{dx}{dt} = -20\,pies/seg,\quad \frac{dy}{dt} = 10\,pies/seg,\quad \frac{dz}{dt} = ?$

Hallamos una relación entre las variables con ayuda de la figura.

$x^2 + y^2 = z^2$

Hallamos una relación entre las razones de cambio

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z}$$

Remplazamos los datos.

Cuando $t = 3\,segs$, $x = 40\,pies, y = 30\,pies$ y $z = 50\,pies$

$\frac{dz}{dt} = -10\,pies/seg.$

El resultado indica que en ese instante los dos vehículos se están acercando con una rapidez de $10\,pies/seg$

- Interpreta gráficamente el problema.. ....1 punto
- Hace bien lo anterior e identifica y simboliza las razones de cambio dadas y pedida........... 2 puntos
- Hace bien los dos pasos anteriores , halla una relación entre las variables y una relación entre las razones de cambio...4 puntos.
- Hace bien todos los pasos anteriores Utiliza correctamente los datos explícitos e implícitos del problema.. 5 puntos.