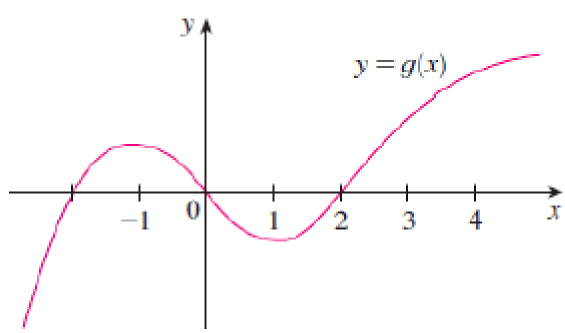
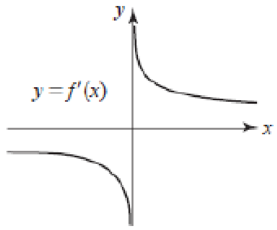
# TALLER DE PREPARACION PARA EL TERCER PARCIAL 2019-30

1. Una curva tiene por ecuación $y = f(x)$
   a. Escriba una ecuación para la pendiente de la línea secante que pasa por los puntos $Q = (3, f(3))$ $y$ $P = (x, f(x))$
   b. Escriba una ecuación para la recta tangente en $Q$
2. ¿Cómo es la línea tangente  a una curva en un punto $P = (a, f(a))$, si esta curva $y = f(x)$ es una recta
3. Usando una de las definiciones de la pendiente de la tangente ( definiciones que involucran el límite), encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado
   a. $f(x) = 4 - \frac{8}{x} \quad P = (1, -4)$
   b. $f(x) = sen(x),\ P = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
   c. $f(x) = -2x^3 + x,\ P = (-1,1)$
   d. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}\ ,\ P = \left(4, \frac{1}{2}\right)$
   e. $y = \frac{1}{2+x}\ ,\ P = \left(2, \frac{1}{4}\right)$
4. Si una pelota es lanzada, desde el suelo, al aire con una velocidad de $40\ ^{m}/_{s}$ , su altura ( en metros) respecto al suelo es $y = 40t - 16t^2$, use la noción de razón de cambio instantáneo para hallar la velocidad de la pelota en el instante $t = 2\ s$
5. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación $s = \frac{1}{t^2}$, donde $t$ se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = 1, t = 2$ $y$ $t = 3$
6. Para la función $g$  cuya grafica  se muestra a continuación. ordene los siguiente números de menor a mayor y explique su razonamiento

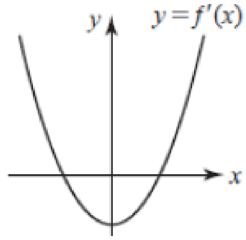
$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



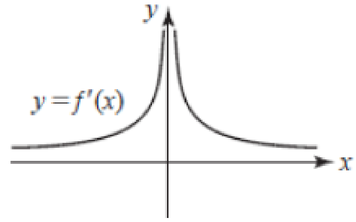

7. Si una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$  en el punto $a = 2$  es $y = 4x - 5$   encuentre $f(2)$  $y$  $f'(2)$
8. Haga el bosquejo de una función $g$ para la cual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$ , $g'(1) = g'(3) = 0, g'(0) = g'(4) = 1, g'(2) = -1, \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ $y$ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$
9. En los ejercicios del  I al VI relacione la gráfica de $f$  con una gráfica de $f'$  de $a) - f)$



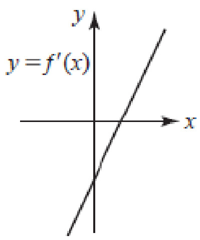

*a)*



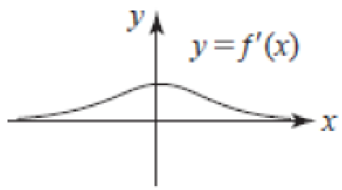

*b)*



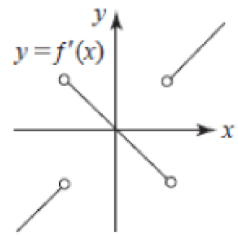

*c)*




*d)*

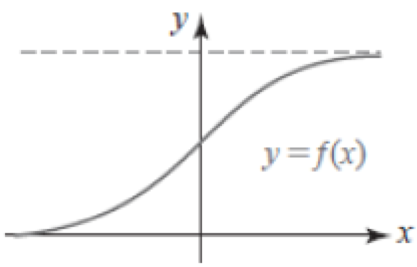



*e)*

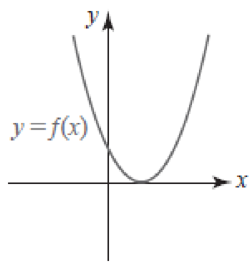



*f)*

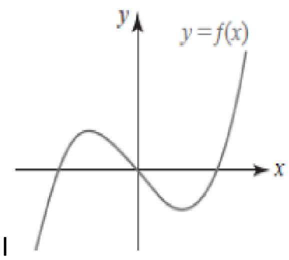
I.



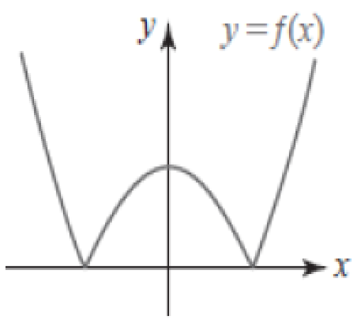

II



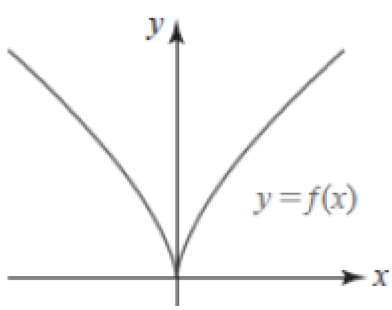

III



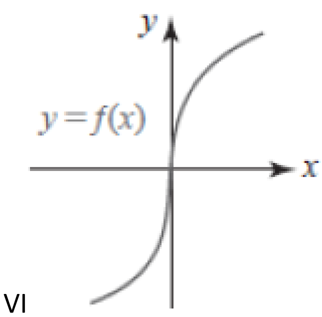

IV




V

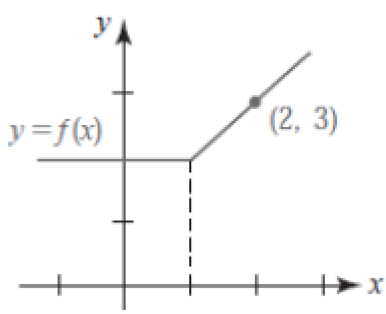



VI

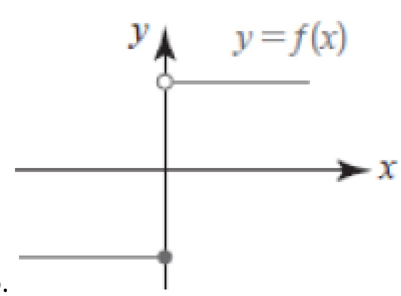


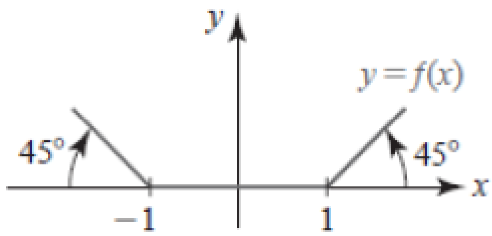

10. Bosqueje la gráfica de $f'$ a partir de la gráfica de $f$

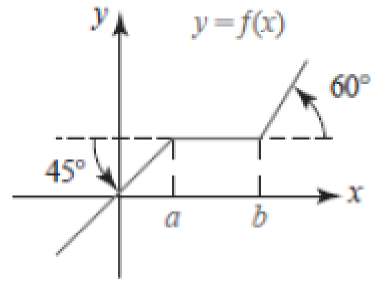
a.

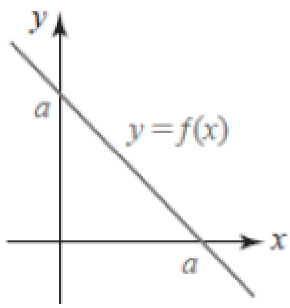


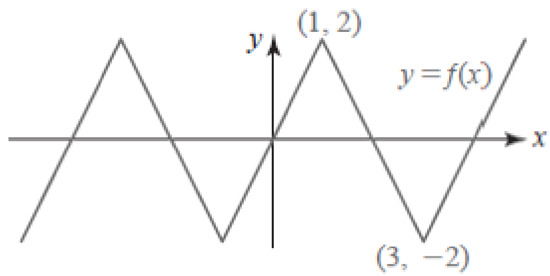

b.



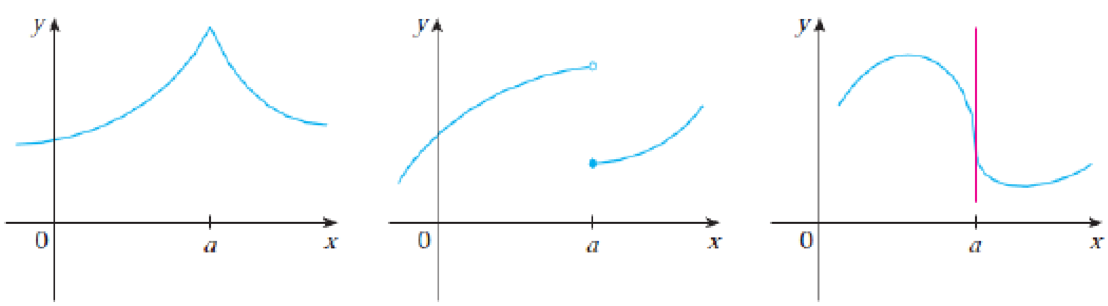
c. 


d. 


e. 

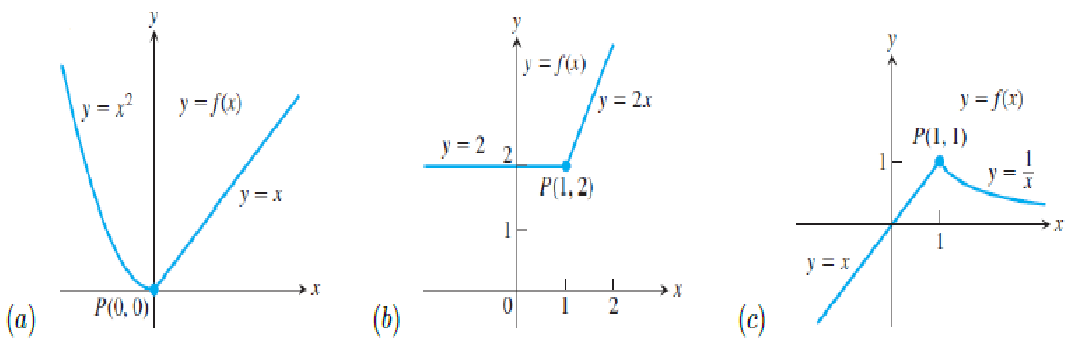

f. 


¿Cómo puede una función dejar de ser diferenciable? Vimos que la función $y = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$; una revisión cuidadosa de su grafica muestra que ésta cambia abruptamente de dirección cuando $x = 0$. En general si la gráfica de una ecuación tiene una “esquina” o un “pico”, entonces $f$ no tiene tangente en este punto y $f$ no es diferenciable allí. (al intentar calcular $f'_+ \ y \ f'_-$ encontramos que son diferentes). Mostramos además que si una función $f$ es diferenciable en $a$, entonces $f$ es continua en $a$; en consecuencia, si $f$ no es continua en $a$ entonces $f$ no puede ser derivable en $a$. Así, $f$ no es derivable en cualquier discontinuidad. Una tercera posibilidad es que la curva tenga un línea tangente vertical en $x = a, f$ es continua en $a$ y $\lim_{x\to a}|f'(x)| = \infty$. Esto quiere decir que la línea tangente se vuelve cada vez más empinada cuando $x \to a$. En la siguiente gráfica se muestran estas tres posibilidades. ( Profesor Unal de Col)




(a) A corner (b) A discontinuity (c) A vertical tangent

11. Compare las derivadas por la derecha y por la izquierda de las funciones dadas en las siguientes gráficas, para mostrar que no son diferenciables en el punto $P$. Puede utilizar cualquier definición para $f'_+(a) \ y \ f'_-(a)$ que involucren el límite




12. Muestre que la función $f(x) = |x-3|$ no es derivable en 3. Encuentre una fórmula para $f'$ y dibuje su gráfica.
13. Si $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ muestre que $g'(0)$ no existe. Dibuje la gráfica de $g$ e ilustre la recta tangente vertical en $x = 0$
14. ¿ Es $f(x) = x + \sqrt{x}$ derivable en $x = 0$?. ¿Cómo se comporta la gráfica de $f$ $en$ $x = 0$?
15. ¿Dónde no es derivable la función $f(x) = [\![x]\!]$? Halle una fórmula para $f'$ y dibuje su gráfica
16. Dada $f$ se definió su derivada por la izquierda en $a$ y su derivada por la derecha en $a$ como sigue

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad o \quad f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad o \quad f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si estos límites existen. Por lo tanto, $f'(a)$ existe, si y solo si, éstas derivadas laterales existen y son iguales

a. Encuentre $f'_-(0), f'_+(0), f'_-(4)$ $y$ $f'_+(4)$ para la función $f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \le 0 \\ 5 - x \; si \; 0 < x < 4 \\ \frac{1}{5-x} \; si \; x \ge 4 \end{cases}$

b. Bosqueje la gráfica de $f$

c. ¿Dónde $f$ es discontinua?

d. ¿Dónde no es derivable $f$?

17. Calcular las derivadas usando reglas de derivación y simplifique donde sea posible

a. $g(x) = (x^2-7)(x^3+4x+2)$ b. $F(y) = \frac{3y+1}{2y-5}$ c. $y = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ d. $y = \frac{10}{x^2+1}$

e. $y = \frac{\sqrt{x}+x}{x^2}$ f. $j(x) = (x + x^{-1})^3$ g. $u = tsen(t)$ h. $v = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

i. $g(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ j. $f(x) = \frac{x^2-2}{2x+1}$ k. $y = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$ l. $y = \frac{v^3-2v\sqrt{v}}{v}$

m. $g(x) = x^2(1-2x)$ n. $F(y) = cy^{-6}$ ñ. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$ o. $y = 3e^x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

p. $f(x) = cos^2(x) - sen^2(x)$ q. $y = (cosc(x))^{-1}$ r. $y = 4cos^2(\sqrt{x})$ s. $g(x) = e^x + x^e$

t. $y = sen(\sqrt{2x})$ u. $y = tan\left(\frac{1}{x}\right)$ v. $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ w. $y = 10^{-3x^2}$

x. $f(x) = e^{e^{x^2}}$ y. $y = e^{2x}e^{3x}e^{4x}$ z. $u = \frac{2}{e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}}$ ll. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

18. Calcular las derivadas usando reglas de derivación y simplifique donde sea posible

a. $f(x) = ln(x^4+3x^2+1)$ b. $F(y) = ln\left(y^{\frac{1}{2}}\right)$ c. $y = (\ln(x))^{\frac{1}{2}}$ d. $y = \frac{10}{x^2+1}$

e. $y = \frac{\ln(x)}{x}$ f. $j(x) = ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ g. $u = ln\left(\sqrt{5x+1}(x^3+6)^6\right)$ h. $y = ln\left(\sqrt{\frac{(3x+2)^5}{x^4+7}}\right)$

i. $g(x) = \sqrt{ln(\sqrt{x})}$ j. $f(x) = \sec(x)\tan(x)$ k. $f(\theta) = \frac{1}{1+\cos(\theta)}$ l. $y = \frac{1}{(1+\sec(x))^2}$

m. $g(x) = e^{xsen(2x)}$ n. $F(y) = sen(e^y) + e^{sen(y)}$ ñ. $u = 10^{1-t^2}$ o. $y = sec^2(3\theta)$

p. $f(x) = \frac{1}{6}(1 + cos^2(7x))^2$ q. $y = 2^{3^{x^2}}$ r. $y = 4sen\left(\sqrt{1 + \sqrt{t}}\right)$ s. $y = cos\left(5sen\left(\frac{t}{3}\right)\right)^{-1}$

t. $f(x) = arcsen(5x - 1)$ u. $y = arccos\left(\frac{x+1}{3}\right)$ v. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ w. $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

x. $g(x) = \tan^{-1}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ y. $u = \ln\left(arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$ z. $y = tan(\sin^{-1}(x^2))$

aa. $y = \sqrt{x^2 - 1}\sec^{-1} x$

19. Encuentre $y'$ usando derivación implícita

a. $9x^2 - y^2 = 1$ b. $2x^2 + x + xy = 1$ c. $\cos(x) + \sqrt{y} = 5$ d. $x = sec\left(\frac{1}{y}\right)$

e. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ f. $4\cos(x)sen(y) = 1$ g. $e^y sen(x) = x + xy$ h. $y = e^{x+y}$

i. $xy = sen(x + y)$ k. $x + y = \cos(xy)$ l. $\arctan(y) = (x^2 + y^2)$ m. $\frac{x+y}{x-y} = x$

n. $ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ñ. $y = cos(e^{xy})$ o. $e^x + e^y = y$ p. $y^2 = \ln(xy)$

20. Use derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función.

a. $y = \frac{\sqrt{(2x+1)(3x+2)}}{4x+3}$ b. $y = (x + 4)(2x + 3)(3x - 4)$ c. $y = \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$ d. $y = x^{sen(x)}$

e. $y = x(x - 1)^x$ f. $y = (ln|x|)^x$ g. $y = (sen(x))^{\cos(x)}$ h. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

i. $y = (sen(x))^{\cos(x)} + (cos(x))^{\mathrm{sen}(x)}$ j. $y = x^{\frac{1}{x}}$ k. $y = \frac{e^{-x}cos^2(x)}{x^2+x+1}$

21. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ o $y''$ mediante derivación implícita

a. $x^3 + y^3 = 1$ b. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ c. $x^2 - y^2 = 25$ d. $x^4 + 4y^2 = 16$

e. $x + y = sen(y)$ f. $xy^4 = 5$ g. $4y^3 = 6x^2 + 1$ h. $x^3 + y^3 = 27$

22. Resuelva los siguientes ejercicios aplicando el concepto de derivada

a. Encuentre los puntos sobre la curva donde la tangente es horizontal (basta con hallar sus coordenadas en $x$)

i. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

ii. $y = e^x - 2x$

iii. $y = \frac{\cos(x)}{2+sen(x)}$

iv. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$

v. $y = x^2\ln(x)$

b. Encuentre una ecuación de la recta tangente de acuerdo con los datos dados

i. $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2, x = 1$ ii. $f(x) = (-1 + \cos(4x))^3, x = \frac{\pi}{8}$

iii. $y = 2^{3^{x^2}}, x = 1$ iv. $y = x\sqrt{2 - x^2},\ x = 1$

v. $x^4 + y^3 = 24, x = 2$ vi. $f(x) = xarctan(x), x = 1$

vii. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4, \left(-3\sqrt{3}, 1\right)$ viii. $f(x) = arcsen(x - 1), x = \frac{1}{2}$

ix. $f(x) = (e^x + 1)^2, x = 0$ x. $f(x) = \ln\left(xe^{-x^3}\right), x = 1$

xi. $y = x^{x+2}, x = 1$ xi. $ysen(2x) = xcos(2y), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

c. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica que tengan la recta tangente tenga la pendiente dada o la propiedad indicada

i. $y = (x + 1)(2x + 5), m = -3$ ii. $y = \frac{x+4}{x+5}$ $, perpendicular\ a \quad y = -x$

ii. $y = e^x, paralela\ a\ 3x - y = 7$ iv. $f(x) = 5 - 2sen(x)\ \ 0 \leq x \leq 2\pi, paralela\ a\ y = \sqrt{3}x - 1$

d. Aplique la red conceptual alrededor de la derivada para resolver los siguientes ejercicios.

i. Encuentre la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(-1) = -11,\ f'(-1) = 7\ y\ f''(-1) = -4.$

ii. Hallar un polinomio $P$ de segundo grado que satisfaga las condiciones siguientes: $P(2) = 5, P'(2) = 3\ y\ P''(2) = 2.$

iii. Hallar una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente 8 en $x = -1$ y pasa por el punto $(2,15)$

iv. Halle una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya grafica posee tangentes horizontales en $(-2,6)\ y\ (2,0)$

v. Encuentre los valores de $b\ y\ c$ de modo que la gráfica de $f(x) = x^2 + bx$ tenga tangente $y = 2x + c$ en $x = -3$

vi. Encuentre una ecuación de la(s) recta(s) que pasan por el punto $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y que es (son) tangente(s) a $f(x) = x^2 + 2x + 2$. (Sugerencia: Dibuje la gráfica de la función y ubique el punto dado).

vii. Encuentre el valor de $k$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{k+x}{x^2}$ tenga pendiente 5 en $x = 2$.

viii. Sea $g(x) = \frac{x}{e^x}$, encuentre $g'(x), g''(x)\ , g'''(x), g^{(4)}(x)$ e induzca una formula general para $g^{(n)}(x)$

ix. Encuentre la 50-ésima derivada de $y = cos(2x)$

x. Encuentre la 1000-ésima derivada de $f(x) = xe^{-x}$

xi. Encuentre constantes $A\ y\ B$ tales que la función $y = Asen(x) + Bcos(x)$ satisface la ecuación $y'' + y' - 2y = sen(x)$

xii. Use la regla de la cadena para mostrar que:

1. La derivada de una función impar es una función par
2. La derivada de una función par es una función impar

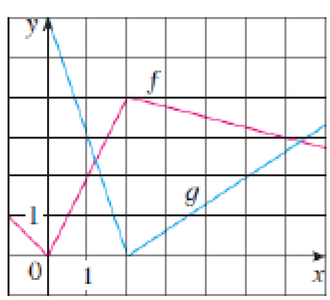
xiii. Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y use la regla de la cadena para mostrar que $\frac{d(|x|)}{dx} = \frac{x}{|x|}$

xiv. Verifique que $f'(x) = g'(x)$ y explique la relación que existe entre $f\ y\ g$.

1. $f(x) = \frac{3x}{x+2}\ , g(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ 2. $f(x) = \frac{sen(x)-3x}{x}\ , g(x) = \frac{sen(x)+2x}{x}$

xv. Sean $f\ y\ g$ funciones cuyas graficas son mostradas abajo, sean $u(x) = f(g(x)), v(x) = g(f(x))\ y\ w(x) = g(g(x))$. Encuentre cada derivada si esta existe. Si no existe, explique por qué.

1. $u'(1)$ 2. $v'(1)$ 3. $w'(1)$




xvi. La función de posición de un objeto, respecto al suelo, que se deja caer desde una altura de 122.5 m es $s(t) = 122.5 - 4.9t^2$ donde $s$ se mide en metros y $t$ en segundos.

1. ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 2\ s$?
2. ¿En qué instante la pelota golpea al suelo?
3. ¿Cuál es la velocidad de impacto?

**xvii.** El volumen $V$ de una esfera de radio $r$ es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Hallar la razón de cambio instantánea del volumen respecto al radio. **Interprete el resultado**

xviii. La Ley de la Gravitación Universal establece que la fuerza $F$ entre dos masas $m_1\ y\ m_2$ separadas por una distancia $r$ es $F = K\frac{m_1 m_2}{r^2}$ donde $K$ es una constante ¿ Cuál es la razón de cambio instantánea de $F$ respecto a $r$ cuando $r = 2\ km$?. **Interprete el resultado**

xix. La ecuación de la demanda de un cierto detergente es $x = 1000(50 - 5p - p^2)$ donde se demandan $x\ cajas$ cuando $p\ (pesos)$ es el precio unitario.

1. Determine la tasa de cambio promedio de la demanda con respecto al precio cuando éste se incrementa de \$2 a \$2.20. **Interprete el resultado**
2. Calcule la tasa de cambio instantánea de la demanda con respecto al precio cuando éste es de \$2. **Interprete el resultado**

xx. La ecuación de la oferta de una cierta clase de bombillos es $x = 1000(4 + 3p + 2p^2)$ donde se ofrecen $x\ bombillos$ cuando el precio unitario es de $p\ (pesos)$.

1. Halle la tasa promedio de cambio de la oferta con respecto al precio cuando éste se incrementa de \$90 a \$93. **Interprete el resultado**
2. Halle la tasa de cambio instantánea de la oferta respecto al precio cuando éste es de \$90. **Interprete el resultado**

xxi. La población de una cierto pueblo $t$ años después del 1 de enero 2019 se espera que sea $f(t)$, donde $f(t) = 10000 - \frac{4000}{t+1}$

1. Utilice la derivada para calcular el cambio esperado de la población del 1 de enero de 2023 al 1 de enero de 2024. **Interprete el resultado**
2. Determine la variación exacta que se espera ocurra en la población del 1 de enero de 2023 al 1 de enero de 2024. **Interprete el resultado**

Nota: En Economía, la variación de una cantidad con respecto a otra se describe por un concepto *medio o promedio,* o por un concepto *marginal.* El concepto "*promedio*" expresa la variación de una cantidad sobre un intervalo específico de valores de una segunda cantidad, mientras que el concepto "*marginal*" es el cambio instantáneo en la primera cantidad que resulta de un cambio unitario muy pequeño en la segunda cantidad.

***El costo promedio*** de producción de cada unidad de una mercancía se obtiene al dividir el costo total entre el número de unidades producidas. Si $Q$ representa el costo promedio y $C$ el costo total de la producción de $x$ unidades de mercancía tendremos:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

***El costo marginal.*** Si $C(x)$ es el costo total de la producción de $x$ unidades de cierta mercancía, entonces el costo marginal cuando $x = x_1$ está dado por $C'(x_1)$. La función $C'$ se denomina ***función costo marginal.***

Asociada al costo marginal y al costo promedia está el concepto de ***Elasticidad del Costo***, que nos indica como varia el costo de producción de la siguiente unidad con respecto al costo promedio de $x$ unidades ya producidas. La ***Elasticidad del costo*** se simboliza con la letra griega $\boldsymbol{\kappa}$ y se define como:

$$\kappa(x) = \frac{C'(x)}{Q(x)}$$

Si $\boldsymbol{\kappa} < 1$ el costo de producción de la siguiente unidad será menor que el costo promedio de las unidades ya producidas. Si $\boldsymbol{\kappa} > 1$ el costo de producción de la siguiente unidad será mayor que el costo promedio de las unidades ya producidas.

En Economía también es importante las funciones ***ingreso total e ingreso marginal***. Recordemos que cuando se demandan $x$ unidades a un precio por unidad de $p$ , la ecuación que relaciona a $x$ y $p$ se denomina **ecuación de demanda.** Si en esta ecuación podemos despejar a $p$ en función de $x$ ***la función ingreso total*** se define y nota como

$$R(x) = xp$$

Notemos que el ingreso promedio $\frac{R(x)}{x}$ es igual al precio unitario $p$

La función $R'(x)$ se denomina ***ingreso marginal***. Ahora, si un fabricante emplea $m$ personas para producir $x$ unidades de un producto por dia, se puede pensar que $x\ es\ una\ función\ de\ m$ y por tanto la función ingreso total $R$ sería una función de $m$ y $R'(m)$ se denomina ***producto del ingreso marginal*** y es aproximadamente igual al cambio en el ingreso cuando el fabricante emplea un trabajador adicional

xxii. Un fabricante determina que $m$ empleados producirán un total de $x$ unidades de u producto por día, donde

$$x = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}$$

Si la ecuación de demanda para el producto es $p = \frac{900}{x+9}$, determine el ***producto del ingreso marginal*** cuando $m = 9$.

*Sugerencia: hallar $R'(m)$ y evaluar cuando $m = 9$.*

xxiii. Un empresario que emplea $m$ trabajadores encuentra que producen

$$x = 2m(2m + 1)^{\frac{1}{2}}$$

unidades de un producto diariamente. El ingreso $R\ en\ dólares$ esta dado por

$$R(x) = \frac{50x}{\sqrt{1000 + 3x}}$$

1. ¿Cuál es el precio por unidad cuando hay 12 trabajadores?
2. Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.
3. Determine el producto del ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.

xxiv. El costo total de producción de $x$ unidades de un cierto artículo está dado por $C(x) = 20 + 5x + 2\sqrt{x}$. Encuentre y de la interpretación económica del resultado.

1. El costo promedio cuando $x = 25$.
2. El costo marginal cuando $x = 25$.
3. La elasticidad del costo cuando $x = 25$.