TALLER DE PREPARACIÓN PARA EL SEGUNDO PARCIAL

II SEMESTRE DE 2019

1. Explique con sus propias palabras lo que significa la ecuación $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$. ¿ Es posible que esta afirmación siga siendo verdadera aún si $f(3) = 5$?
2. Explique lo que significa decir que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 7\ y\ que\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$, ¿ es posible que exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$. Explique
3. Suponga que una función $f(x)$ está definida para todos los valores reales x, excepto para $x = x_0$. ¿Qué puede decirse acerca de la existencia de $\lim_{x\to x_0} f(x)$?. Explique
4. Explique el significado de cada una de las siguientes ecuaciones
   a. $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$
   b. $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$
5. Para la función cuya grafica se presenta en la figura establezca el valor solicitado en cada caso. Si éste no existe , explique por qué

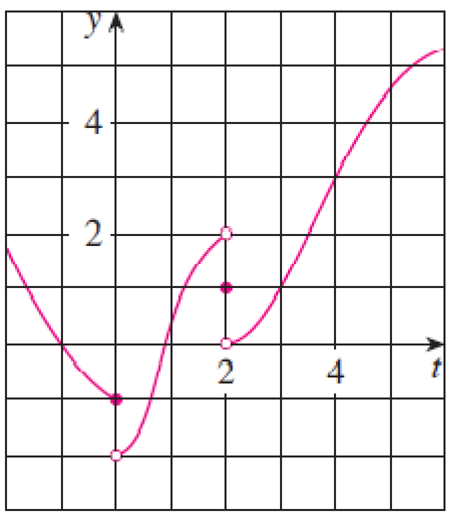


Figura 1

   a. $\lim_{t\to 0^-} g(t)$
   b. $\lim_{t\to 0^+} g(t)$
   c. $\lim_{t\to 0} g(t)$
   d. $g(2)$
   e. $\lim_{t\to 2^-} g(t)$
   f. $\lim_{t\to 2^+} g(t)$
   g. $\lim_{t\to 2} g(t)$
   h. $\lim_{t\to 4} g(t)$

6. Para la función R cuya grafica se muestra en la figura, establezca lo siguiente

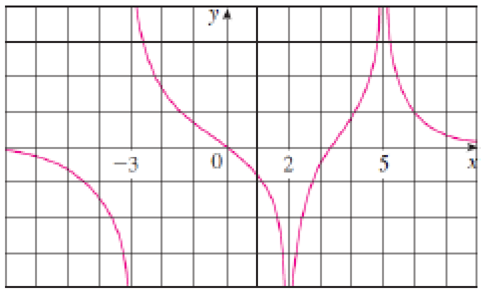


Figura 2

a. $\lim_{x\to 2} R(x)$
b. $\lim_{x\to 5} R(x)$
c. $\lim_{x\to -3^-} R(x)$
d. $\lim_{x\to -3^+} R(x)$

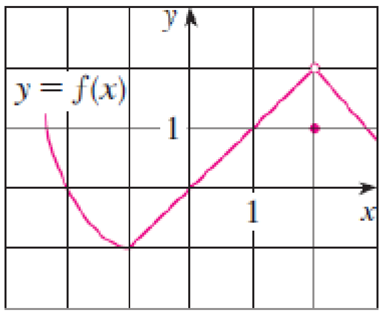
7. Bosqueje la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 2-x \ \ si\ x < -1 \\ x,\ \ si -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 \ \ si\ x > 1 \end{cases}$ y úsela para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe

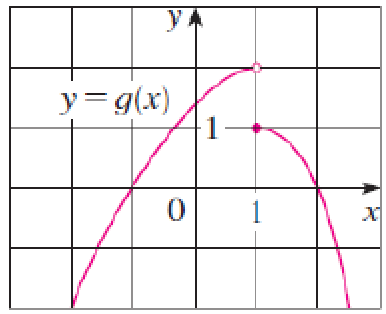
8. Bosqueje la gráfica de un función f que satisface las condiciones dadas
   a. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ $no\ este\ definida$
   b. $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -3.$ $f(1) = 1,$ $f(4) = -1$

9. Encuentre las asíntotas verticales de la función $y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$. Confirme su respuesta graficando la función usando un software

10. Suponga que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$ y $\lim_{x\to 2} h(x) = 0$. Encuentre los límites que existen. Si no existe, explique por qué
   a. $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$
   b. $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$
   c. $\lim_{x\to 2} \frac{3f(x)}{g(x)}$
   d. $\lim_{x\to 2} \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]$
   e. $\lim_{x\to 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

11. Las gráficas de f y g están dadas por la siguiente imagen. Úselas para evaluar cada límite si existe. Si el límite no existe, explique por qué.
   a. $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$
   b. $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$
   c. $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$
   d. $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$
   e. $\lim_{x\to 2}[x^3 g(x)]$
   f. $\lim_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$





12. Evalúe cada límite y justifique cada paso con la propiedad adecuada.
   a. $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+1}{x^2+6x-4}$
   b. $\lim_{x\to 8}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)(2-6x^2+x^3)$
   c. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x^3}{1+4x^2+3x^4}\right)^3$
   d. $\lim_{x\to -4^-}\sqrt{16-x^2}$

13. Evalúe el límite
   a. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-x-12}$ $\quad R.\ \frac{1}{7}$
   b. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$ $\quad R.\ \frac{9}{2}$
   c. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ $\quad R.\ 2x$
   d. $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ $\quad R.\ 6$
   e. $\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$ $\quad R.\ \frac{1}{2}$
   f. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ $\quad R.\ 4$
   g. $\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ $\quad R.\ 0$
   h. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ $\quad R.\ 3x^2$
   i. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ $\quad R.\ 2$
   j. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ $\quad R.\ \frac{1}{27}$

k. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\quad R.\ \frac{1}{2}$

l. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$ $\quad R.\ \frac{2}{3}$

m. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{10-x}-3}$ $\quad R. -3$

n. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^3-1}$ $\quad R.\ \frac{1}{36}$

o. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ $\quad R.\ \frac{4}{3}$

p. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^4+3x^2+x-5}$ $\quad R.\ \frac{2}{11}$

q. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x-2}{x^3-1}$ $\quad R.\ \frac{5}{3}$

r. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-2x-3}{x^4-2x^3-27}$ $\quad R.\ \frac{13}{54}$

s. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x+6}{x^4-4x^2+x-2}$ $\quad R.\ \frac{5}{17}$

t. $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^2+5x-14}$ $\quad R.\ \frac{14}{9}$

u. $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}$ $\quad R.\ \frac{1}{72}$

v. $Dada\ f(x) = x^2 - 3x, hallar\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\quad R. 2x-3$

w. $Dada\ f(x) = \sqrt{5x+1}, hallar\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\quad R. \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$

x. $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ $\quad R. \frac{1}{3}$

y. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ $\quad R.\ 0$

z. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ $\quad R.\ 1$

aa. $\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ $\quad R. {}^{1}/_{3}$

bb. $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ $\quad R. 0$

cc. $\lim_{x\to 0}\frac{tan(2x)}{sen(2x)}$ $\quad R.\ 1$

dd. $\lim_{x\to 0}\frac{tan(7x)}{3x}$ $\quad R.\ {}^{7}/_{3}$

ee. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{tan^3(3x)}$ $\quad R.\ {}^{1}/_{27}$

ff. $\lim_{x\to 0}\frac{tan^2(4x)}{1-cos(5x)}$ $\quad R. {}^{32}/_{25}$

gg. $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-\tan(x)}{1-\cos(x)}$ $\quad R.\ 0$

hh. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^3(x)}{4x^2}$ $\quad R.\ {}^{3}/_{8}$

ii. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\quad R. -1$

jj. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-sen(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\quad R. 0$

kk. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+sen(3x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ $\quad R. {}^9\!/_2$

ll. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen^2(2x)}{1-sen(x)}$ $\quad R. 8$

mm. $\lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)^2}{sen^2(x)}$ $\quad R. 1$

nn. $\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos(x)}{sen(x)}$ $\quad R. 0$

oo. Verifique que: $\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \cos(x)$

pp. Verifique que: $\lim_{h\to 0} \frac{cos(x+h)-cos(x)}{h} = \text{sen}(x)$

14. Encuentre el límite si existe, si el límite no existe explique por qué.
    a. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-x}{x}$
    b. $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$
    c. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$
    d. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$
    e. $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{2-|x|}{2+x}\right)$
    f. $\lim\limits_{x\to 3} (2x + |x-3|)$

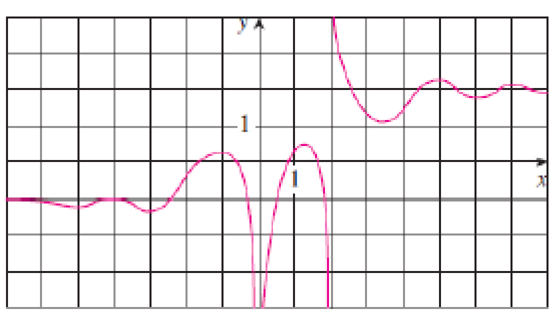
15. Use el teorema de comprensión o del emparedado para mostrar que
    a. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos(20\pi x) = 0$
    b. $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$
    c. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0$
    d. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} = 0$
    e. $\lim_{x\to 0} \frac{x^4 sen\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} = 0$
    f. $\lim_{x\to 0} \left|2x\, sen\left(\frac{1}{2x}\right)\right| = 0$
    g. $\lim_{x\to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0$
    h. $\lim_{x\to 3} g(x) = -4, si\ |g(x)+4| \le 2(3-x)^4$
    i. $\lim_{t\to 0} (2^t - 1) cos\left(\frac{1}{t}\right) = 0$
    j. $\lim_{t\to 0^-} sen^2\left(\frac{1}{t}\right)(3)^{\frac{1}{t}} = 0$

16. Sea $f(x) = [\![x]\!]$ la función parte entera, ¿para qué valores de a existe el $\lim\limits_{x\to a}[\![x]\!]$?
17. Sea $(x) = [\![\cos(x)]\!]\ , para - \pi \leq x \leq \pi.$ Bosqueje la gráfica de f y determine los valores de a para los cuales $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe
18. En la teoría de la relatividad la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre cuando $v \to c^-$

19. Explique con sus propias palabras el significado de cada una de las siguientes expresiones
    a. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$
    b. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$
20. ¿Puede la gráfica de $y = f(x)$ intersecar a una asíntota vertical?. ¿Puede intersecarse con una asíntota horizontal?. Ilustre con gráficas.
21. ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas para ilustrar las posibilidades.
22. Para la función g que se ilustra a continuación, determine
    a. $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$
    b. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
    c. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
    d. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$
    e. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$
    f. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$
    g. Las ecuaciones de las asíntotas

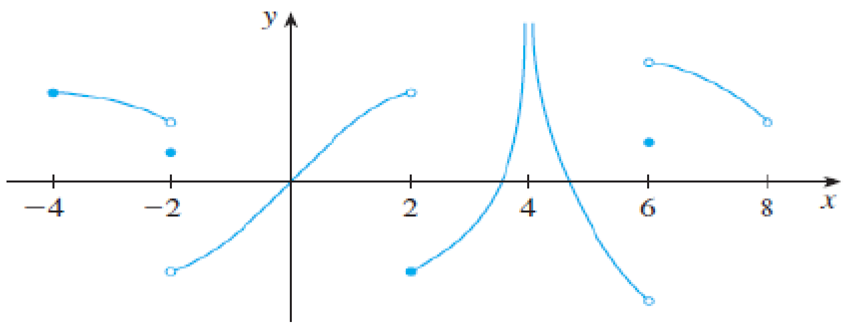


23. Dibuje un ejemplo de una función que satisfaga
   a. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$
   b. $f(0) = 3$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

24. Calcular cada uno de los siguientes límites:
   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x+4}{2x^2+5x-8}$
   b. $\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}+t^2}{2t-t^2}$
   c. $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+1)^2}{(x-1)^2(x^2-x)}$
   d. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$
   e. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$
   f. $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{3x}$
   g. $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$
   h. $\lim_{x\to\infty}(e^{-x} + 2\cos(3x))$
   i. $\lim_{x\to\infty}(e^{-2x}\cos(x))$
   j. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x} - 3x\right)$
   k. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)$
   l. $\lim_{x\to-\infty}(x^4 + x^5)$
   m. $\lim_{x\to\infty}(\tan^{-1} e^x)$
   n. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$
   o. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$
   p. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

25. Halle las asíntotas verticales y horizontales de cada curva (si es que estas existen). Haga la gráfica, usando un software, para verificar sus respuestas.
   a. $y = \frac{2x^2+x+1}{x^2+x-2}$
   b. $y = \frac{2e^x}{e^x-5}$
   c. $y = \frac{\sqrt{4x^2+x-2}}{2x-1}$
   d. $y = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
   e. $y = \frac{x^3-x}{x^2-6x+5}$
   f. $y = \frac{2-t+\sin(t)}{t+\cos(t)}$

26. Encuentre una fórmula para una función que tiene asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal en $y = 1$
27. A partir de la gráfica de g determine los intervalos sobre los que g es continua. ¿En qué puntos g tiene discontinuidades? ¿De qué tipo son tales discontinuidades?



28. Dibuje una función que tenga una discontinuidad de salto en $x = 2$ y una discontinuidad removible en $x = 4$ y que sea continua en todas las demás partes.
29. Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el número a dado.
    a. $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}\,,\ \ a = 3$
    b. $h(t) = \frac{2t-3t^2}{1+t^3}\ , a = 1$
30. Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el intervalo dado
    a. $f(x) = 2x + 3\ ,\ (2, \infty)$
    b. $h(t) = 2\sqrt{3-t},\ (-\infty, 3]$
31. Explique por qué la función es discontinua en el punto a dado. Dibuje la gráfica de la función
    a. $f(x) = \ln|x-2|\,,\ a = 2$
    b. $f(x) = \begin{cases} \cos(x)\ si\ x < 0 \\ 0\ si\ x = 0 \\ 1 - x^2\ si\ x > 0 \end{cases}, a = 0$
    c. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-5x-3}{x-3}\ \ si\ \ x \neq 3 \\ 6\ \ si\ x = 3 \end{cases}, a = 3$
    d. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}\ , si\ x \neq -2 \\ 1\ \ si\ x = -2 \end{cases}, a = -2$
32. En qué puntos son continuas las siguientes funciones. Explique plenamente su respuesta.
    a. $f(x) = \frac{1}{x-2} - 3x$
    b. $g(t) = \frac{t+1}{t^2-4t+3}$
    c. $y = |x-1| + sen(x)$

d. $y = \frac{xtan(x)}{x^2+1}$
e. $f(x) = \frac{x}{[\![x]\!]}$
f. $f(x) = \frac{x+2}{\cos(x)}$
g. $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+sen^2(x)} - 3x$
h. $y = (2x-1)^{1/5}$

33. Explique por qué cada una de las siguientes funciones son continuas en todo su dominio. Especifique el dominio de cada una de ellas.
    a. $f(x) = \frac{x}{x^2+5x+6}$
    b. $f(x) = e^{-5x}\cos(2\pi x)$
    c. $h(t) = \sin^{-1}(t^2-1)$
    d. $r(t) = \ln(t^4-1)$

34. ¿Para qué valor de la constante c es continua la función f en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & si\ x < 2 \\ x^3 - cx & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

35. ¿Para qué valores de las constantes a y b es continua la función f en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

36. ¿Para qué valores de las constantes a y b es continua la función f en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^3 - 2b & si\ x \leq -1 \\ 2x - 4b & si - 1 < x \leq 1 \\ ax^2 + 3 & si\ x > 1 \end{cases}$$

37. ¿Para qué valores de las constantes a y b es continua la función f en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & si\ x < -3 \\ 3ax - 7b & si - 3 \leq x \leq 3 \\ x - 12b & si\ x > 3 \end{cases}$$

38. ¿Para qué valores de las constantes a y b es continua la función f en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & si\ x < 0 \\ ax + b & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+8} & si\ x > 1 \end{cases}$$

39. Determine si la función f tiene una discontinuidad removible en a. En caso afirmativo redefina la función de tal forma que la función resultante sea continua en a.
    a. $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$, $a = 4$

    b. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$, $a = 0$

    c. $f(x) = xsen\left(\frac{1}{x}\right)$, $a = 0$

    d. $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, $a = 1$
40. Use el teorema del valor intermedio para mostrar que existe una solución de la ecuación en el intervalo indicado
    a. $x^4 + x - 3 = 0 \ (1,2)$
    b. $\sqrt[3]{x} = 1 - x \ \ (0,1)$
41. Use el teorema del valor intermedio para mostrar que la ecuación $\ln(x) = 3 - 2x$ tiene al menos una solución
42. Muestre que la ecuación $x^3 - 15x + 1 = 0$ tiene tres soluciones en el intervalo $[-4,4]$
43. Suponga que f es continua en $[1,5]$ y que las únicas soluciones de la ecuación $f(x) = 6 \ son \ x = 1 \ y \ x = 4$. Si $f(2) = 8$ explique por qué $f(3) > 6$