

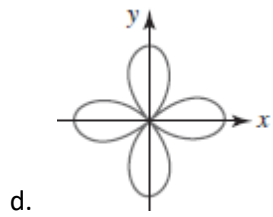
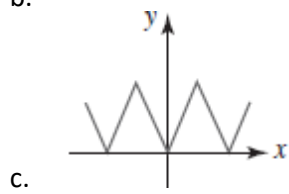
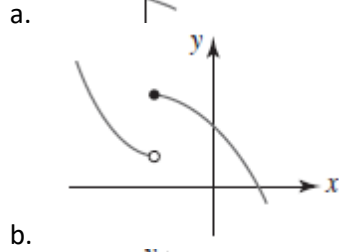
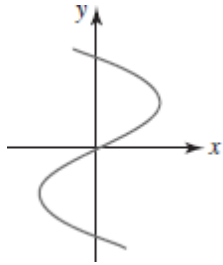
TALLER DE PREPARACIÓN PARA EL PRIMER PARCIAL

II SEMESTRE DE 2019

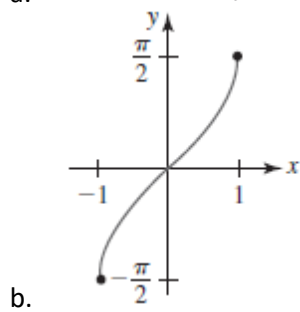
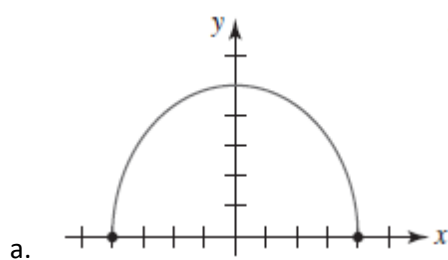
- Las siguientes igualdades definen relaciones. Para cada una de ellas, hallar funciones despejando a y . Dibuje las graficas de las funciones encontradas.
 - $x^2 + y^2 = 4$
 - $3x + y = -1$
 - $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 3$
- Suponga que y es una función de x . Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.
 - Para cada valor de x , y puede tomar varios valores
 - Para cada valor de y , x puede tomar varios valores
 - Cuando x crece, y también crece
- Cuando trazamos la gráfica de una función f en el plano cartesiano, lo que estamos haciendo es ubicar parejas ordenadas de la forma $(x, f(x))$. Justifique la veracidad de las siguientes afirmaciones:
 - Las parejas ordenadas $(2,5)$, $(3,-5)$ y $(2,7)$ pertenecen a la grafica de alguna función.
 - La grafica de cualquier función está formada por parejas de la forma (x, y) donde siempre $x \neq y$
 - Para cada (x, y) , un punto en la grafica de alguna función, se cumple que para cada valor de y existe una única pre-imagen x .
- En cada caso dar ejemplos de relaciones que no sean funciones y de funciones que cumplan las condiciones dadas:
 - Las parejas $(2,2)$, $(3,3)$ y $(4,4)$ estén en su gráfica.
 - La gráfica sea simétrica respecto al eje y pero no al eje x
- Si $f(x) = \frac{x^2}{x^3-2}$, hallar $f(-\sqrt{2})$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + 20$ encuentre $f(2a)$, $f(a^2)$, $f(-5x)$, $f(2a + 1)$ y $f(x + h)$
- Para qué valores de x , $f(x) = 6x^2 - 1$ es igual a 24
- Encuentre el dominio de la función f dada
 - $f(x) = \sqrt{4x - 2}$
 - $f(x) = \frac{10}{\sqrt{1-x}}$
 - $f(x) = \frac{2x-5}{x(x-3)}$
 - $f(x) = \frac{1}{x^2-10x+25}$
 - $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$
 - $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

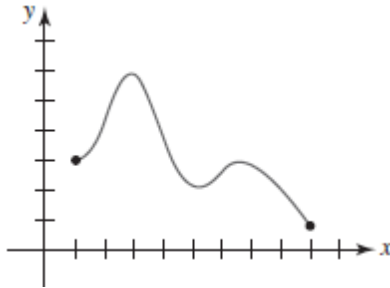
h. $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$

9. Determine si la gráfica de la figura es la gráfica de una función

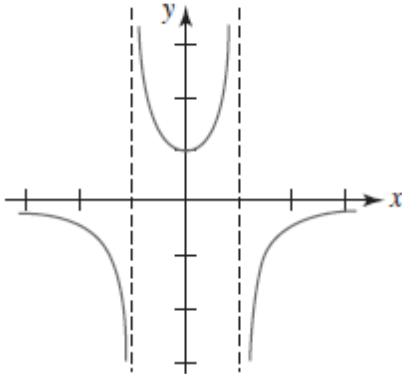


10. Use la gráfica de la función dada en la figura para encontrar el dominio y rango





c.



d.

11. Encuentre las intersecciones x e y de la gráfica de la función dada, en caso de haberlas.

No grafique.

a. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

b. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

c. $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-16}$

12. Encuentre dos funciones $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ definidas por la ecuación dada.

a. $x = y^2 - 5$

b. $x^2 - 4y^2 = 16$

13. La función factorial $f(n) = n!$, donde $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, se define como el producto de los n primeros enteros positivos; es decir $f(n) = n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$

a. Evalúe $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$

b. Demuestre que $f(n + 1) = f(n) * (n + 1)$

c. Simplifique $\frac{f(5)}{f(4)}$ y $\frac{f(7)}{f(5)}$

d. Simplifique $\frac{f(n+3)}{f(n)}$

14. Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ de tal manera que los conjuntos dados sean el más grande que tengan como dominio

a. $[3, +\infty)$

b. $[-5, 5]$

c. $(-\infty, 3] \cup [3, +\infty)$

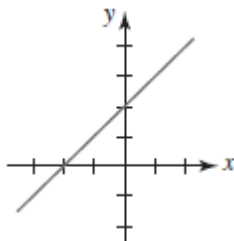
d. $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

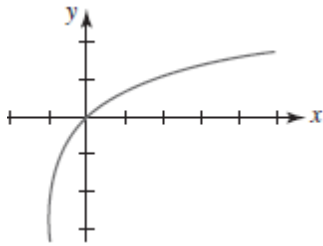
e. $\mathbb{R} - \{2, 5\}$

15. Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo rango es

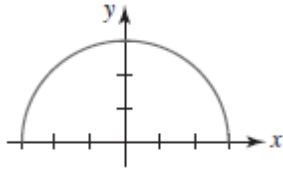
a. $[3, +\infty)$

- b. $(3, +\infty)$
16. En cada caso defina una función que tenga las características dadas y dibuje su gráfica.
- Es creciente en el intervalo $[0,1]$ y decreciente en el intervalo $[2,3]$
 - Es una función polinómica cuya grafica corta al eje x en dos puntos distintos y pasa por el punto $(0,2)$
 - Es una función racional y su dominio es el conjunto \mathbb{R} de los números reales
 - Su dominio es el conjunto \mathbb{R} de números reales y su rango el conjunto de los números negativos.
17. Encuentre $f + g, f - g, f * g$ y $\frac{f}{g}$ y sus respectivos dominios.
- $f(x) = 2x + 5, g(x) = -4x + 8$
 - $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}, g(x) = \frac{x-3}{4x+2}$
 - $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$
18. Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus respectivos dominios
- $f(x) = 2x + 4, g(x) = \frac{1}{2x+4}$
 - $f(x) = \frac{3}{x}, g(x) = \frac{x}{x+1}$
 - $f(x) = x^2 + \sqrt{x}, g(x) = x^2$
 - $f(x) = \sqrt{x-3}, g(x) = x^2 + 2$
19. Los puntos $(-2,1)$ y $(3,-4)$ están sobre la gráfica de una función $y = f(x)$. Encuentre los puntos correspondientes sobre la gráfica, obtenidos por las transformaciones dadas.
- La grafica de f desplazada 2 unidades hacia arriba.
 - La grafica de f desplazada 5 unidades hacia abajo.
 - La grafica de f desplazada 6 unidades hacia la izquierda
 - La grafica de f desplazada 1 unidad hacia la derecha.
 - La grafica de f desplazada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.
 - La grafica de f desplazada 3 unidades hacia abajo y 3 unidades hacia la derecha.
 - La grafica de f reflejada en el eje y
 - La grafica de f reflejada en el eje x
20. Use la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la figura para graficar las siguientes funciones: $y = f(x) + 2, y = f(x) - 2, y = f(x + 2), y = f(x - 5), y = f(-x), y = -f(x)$.

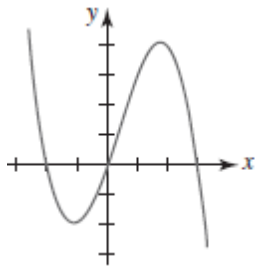




b.



c.

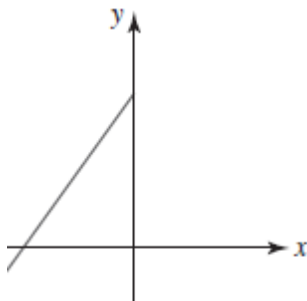


d.

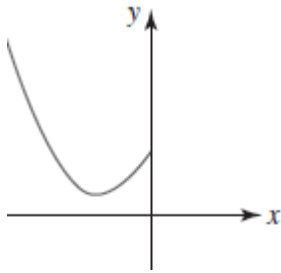
21. Encuentre la ecuación de la gráfica final después que las transformaciones dadas se aplican a la gráfica de $y = f(x)$

- La gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada 5 unidades hacia arriba y 1 unidad a la derecha.
- La gráfica de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ estirada verticalmente por un factor de 3 unidades y luego desplazada 2 unidades a la derecha.
- La gráfica de $f(x) = x^4$ reflejada en el eje x y luego desplazada 7 unidades hacia la izquierda.
- La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ reflejada en el eje y , luego desplazada 5 unidades hacia la izquierda y 10 unidades hacia abajo

22. Complete la gráfica de la función dada $y = f(x)$ si i) f es una función par y ii) f es una función impar.



a.



b.

23. Complete la tabla donde

a. f es una función par

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	10	8	0
$g(x)$	2	-3	0	1	-4
$(f \circ g)(x)$					

b. g es una función impar

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-3	0	-1	-4
$g(x)$	9	7	-6	-5	13
$(g \circ f)(x)$					

24. Dada la función $U(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$ llamada función de Heaviside. Trazar la gráfica de:

a. $y = 2U(x - 1) + U(x - 2)$

b. $y = U\left(x + \frac{1}{2}\right) - U\left(x - \frac{1}{2}\right)$

25. Determine si $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ es verdadera o falsa

26. Encuentre una ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

a. Pasa por $(-2, 4)$ y es paralela a $3x + y - 5 = 0$

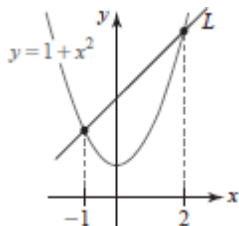
b. Pasa por $(2, 3)$ y es perpendicular a $x - 4y + 1 = 0$

27. Encuentre una función lineal $f(x) = ax + b$ que cumpla las dos condiciones dadas

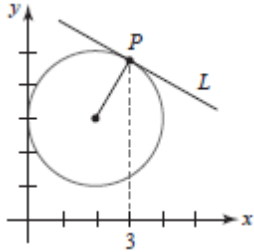
a. $f(-1) = 5, f(1) = 6$

b. $f(-1) = 1 + f(2), f(3) = 4f(1)$

28. Encuentre una ecuación de la recta L que se muestra en la figura.



a.



b.

29. Para cada una de las funciones cuadráticas haga

- i. Encuentre todas las intersecciones de la gráfica de f
- ii. Exprese la función en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$
- iii. Encuentre el vértice y el eje de simetría
- iv. Trace la gráfica de f
- v. ¿Cuál es el rango de f ?
- vi. ¿En qué intervalos f es creciente? ¿y decreciente?

a. $f(x) = (x - 2)(x - 6)$

b. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

30. Relacione la gráfica dada con una de las funciones polinomiales. Argumente su elección.

i. $f(x) = x^2(x - 1)^2$

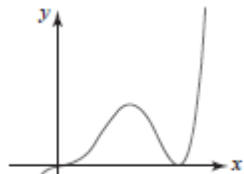
ii. $f(x) = -x^3(x - 1)$

iii. $f(x) = x^3(x - 1)^3$

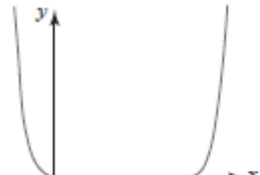
iv. $f(x) = -x(x - 1)^3$

v. $f(x) = -x^2(x - 1)$

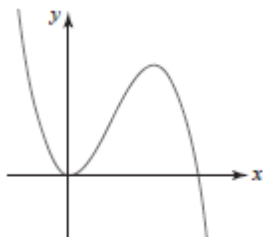
vi. $f(x) = x^3(x - 1)^2$



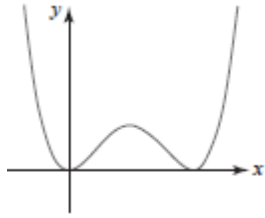
a.



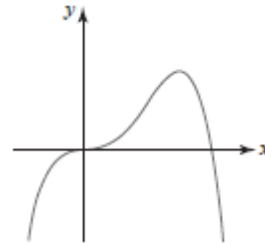
b.



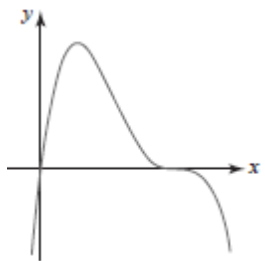
c.



d.



e.



f.

31. Encuentre todas las asíntotas para la gráfica de la función racional dada. Encuentre las intersecciones x e y de la gráfica. Trace la gráfica.

a. $f(x) = \frac{x(x-5)}{x^2-9}$

b. $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+2}$

c. $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-1}$

d. $f(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$

32. Proporcione una función racional que satisfaga las condiciones dadas. Argumente su solución.

a. Asíntotas verticales $x = 1$, $x = 2$, asíntota horizontal $y = 1$

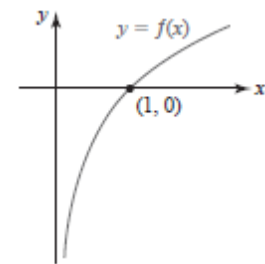
b. Asíntota oblicua $y = x + 1$, asíntota vertical $x = 1$

c. Asíntota horizontal $y = 0$, asíntota vertical $x = -2$

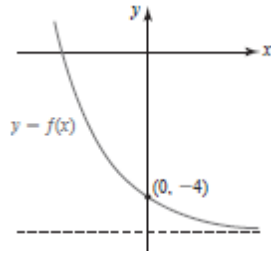
d. Asíntota oblicua $y = -x + 1$, asíntota vertical $x = 1$

33. Determine los puntos donde la gráfica de $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-5x}$ corta su asíntota horizontal

34. Trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f

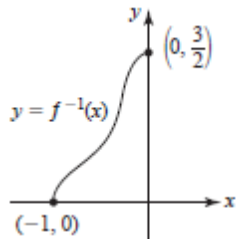


a.

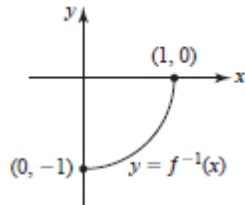


b.

35. Trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1}



a.



b.

36. Determine si la función dada es uno a uno al analizar su gráfica, en caso de serlo hallar la función inversa si es posible. Luego compruebe que

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ y que } f^{-1}(f(x)) = x.$$

Por último, trace en un mismo plano cartesiano las gráficas de $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$

- $f(x) = 4$
- $f(x) = |x - 2|$
- $f(x) = 6x - 9$
- $f(x) = x^3 - 8$
- $f(x) = x^3 - 3x$
- $f(x) = \sqrt[3]{2x - 4}$
- $f(x) = \frac{2-x}{1-x}$

37. La función dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre x en el dominio de f^{-1} que satisface la ecuación indicada.

- $f(x) = \sqrt{x} + x$; $f^{-1}(x) = 9$
- $f(x) = \frac{4x}{x+1}$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}$

38. Si f es una función de un conjunto A en un conjunto B y C , se define $f|_C$ como la restricción de f en C , es decir, una nueva función que tiene dominio C . Dadas las siguientes funciones reales, encuentre $f|_C$ inyectiva y dibuje las gráficas de $f|_C$ y f .

- $f(x) = x + 2$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$, para $x \neq 0$
- $f(x) = |x|$

39. Encuentre una función inversa $f^{-1}|_C$ cuyo rango sea el mismo que el de la función dada sea el mismo que el de la función dada al restringir convenientemente el dominio de f
- $f(x) = x^2 + 2x + 4$
 - $f(x) = -x^2 + 8x$
40. Escriba la expresión dada como una cantidad algebraica en x
- $\cos(\text{sen}^{-1}(x))$
 - $\tan(\text{sen}^{-1}(x))$
 - $\sec(\text{tan}^{-1}(x))$
 - $\text{sen}(\text{sec}^{-1}(x)), x \geq 1$
41. Compruebe gráficamente las identidades por una reflexión y un desplazamiento vertical.
- $\text{sen}^{-1}(x) + \text{cos}^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$
 - $\text{arccot}(x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
42. Escribir la expresión exponencial dada como una expresión logarítmica equivalente.
- $4^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}$
 - $9^0 = 1$
 - $10^4 = 10000$
 - $10^{0.3010} = 2$
43. Escribir la expresión logarítmica dada como una expresión exponencial equivalente.
- $\log_2 128 = 7$
 - $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2$
 - $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$
 - $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$
44. Encuentre una función logarítmica $f(x) = \log_b x$ tal que la gráfica de f pase por el punto dado
- $(49, 2)$
 - $\left(4, \frac{1}{3}\right)$
45. Encuentre el dominio de la función dada, la intersección x y la asíntota vertical de la gráfica. Trace la gráfica.
- $f(x) = -\ln x$
 - $f(x) = -1 + \ln x$
 - $f(x) = -\ln(x + 1)$
 - $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$
46. Use las leyes de los logaritmos para volver escribir la expresión dada con un solo logaritmo.
- $\ln(x^4 - 4) - \ln(x^2 + 2)$
 - $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2 \ln(x^3) - 4 \ln(y)$
 - $\ln 5 + \ln 5^2 + \ln 5^3 - \ln 5^6$

d. $5 \ln 2 + 2 \ln 3 - 3 \ln 4$

47. Use las leyes de los logaritmos de modo que \ln y no contenga productos, cocientes ni potencias.

a. $y = \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^3+2}}$

b. $y = \sqrt{\frac{(2x+1)(3x+2)}{4x+3}}$

c. $y = \frac{(x^3-3)^5(x^4+3x^2+1)^8}{\sqrt{x}(7x+5)^9}$

d. $y = 64x^6\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x^2+2}$

48. Use el logaritmo natural para despejar x

a. $2^{x+5} = 9$

b. $4 * 7^{2x} = 9$

c. $5^x = 2e^{x+1}$

d. $3^{2(x-1)} = 2^{x-3}$

49. Despeje x

a. $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$

b. $\ln 3 + \ln(2x - 1) = \ln 4 + \ln(x + 1)$

50. Un acuario debe tener 50 cm de altura y 200 cm³ de volumen. Si x e y denotan el largo y el ancho de la base.

a. Exprese a y como función de x

b. Exprese la cantidad de vidrio necesaria para hacer el acuario como función de x

51. La escala de *Richter* fue desarrollada en 1935 por Charles Richter para medir la magnitud M de un terremoto. Esta dada por :

$$M = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E}{E_0} \right)$$

Donde E es la energía liberada por el terremoto medida en *Joules* y E_0 es la energía liberada por un terremoto de leve intensidad, la cual se tomo como $E_0 = 10^{4.40}$ *Joules*. El terremoto más intenso registrado en Colombia ocurrió en 1906 y liberó una energía de 1.99×10^{17} *Joules*. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de *Richter*? Calcule su respuesta con una cifra decimal.

52. La relación entre las lecturas de las temperaturas en grado Fahrenheit (F) y en grados Celsius (C) está dada por (F) $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a. Encuentre la temperatura para la cual la lectura es la misma en ambas escalas.

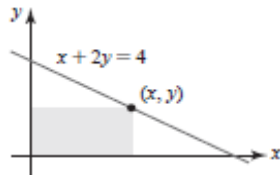
b. ¿A qué temperatura en grados la lectura en grados Fahrenheit es el doble que la lectura en grados Celsius

53. Un modelo exponencial para el número de bacterias en un cultivo en el instante t está dado por $P(t) = P_0 e^{kt}$, donde P_0 es la población inicial y $k > 0$ es la constante de crecimiento.

a. Después de 2 horas se observa que el número inicial de bacterias se ha duplicado. Encuentre el modelo de crecimiento exponencial $P(t)$.

- b. Según el modelo del inciso a) , ¿cuál es el número de bacterias presentes en el cultivo después de 5 horas?
- c. Encuentre el tiempo necesario para que el cultivo crezca hasta 20 veces su tamaño inicial.
54. Un modelo exponencial para la cantidad de sustancia radiactiva remanente en el instante t está dado por $A(t) = A_0 e^{kt}$, donde A_0 es la cantidad inicial y $k < 0$ es la constante de desintegración.
- a. Al inicio estaban presentes 200 mg de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas, la masa había decrecido 3%. Elabore un modelo exponencial para la cantidad de la sustancia en desintegración remanente después de t horas.
- b. Encuentre la cantidad remanente después de 24 horas.
- c. Encuentre el instante en que $A(t) = \frac{1}{2} A_0$. Ese instante denomina vida media de la sustancia
55. Un estudiante contagiado con el virus de la influenza vuelve a un campus aislado de una universidad donde hay Estudiantes. El número de estudiantes infectados después de t días del regreso del estudiante se pronostica por medio de la función logística
- $$P(t) = \frac{2000}{1 + 1999e^{-0.8905t}}$$
- a) Según este modelo matemático, ¿cuántos estudiantes estarán contagiados por la influenza después de 5 días?
- b) ¿En cuánto tiempo estará infectada la mitad de la población de estudiantes?
- c) ¿Cuántos estudiantes pronostica el modelo que estarán infectados al cabo de un muy largo periodo?
56. Si un objeto se coloca en un medio como aire, agua, etc . que se mantiene a temperatura constante T_m y si la temperatura inicial del objeto es T_0 entonces la ley de enfriamiento de Newton pronostica que la temperatura del objeto en el instante t está dada por $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$, $k < 0$
- a. Un pastel se retira de un horno donde la temperatura del objeto era 350 °F y se coloca en una cocina donde la temperatura es constante a 75 °F. Un minuto después se mide que la temperatura del paste es 300 °F. ¿Cuál es la temperatura del pastel después de 6 minutos?
- b. ¿En que instante la temperatura del pastel es 80 °F?
57. El producto de números positivos es 50. Exprese su suma como una función de uno de los números.
58. La suma de dos números no negativos es 1. Exprese la suma del cuadrado de uno y el doble del cuadrado del otro como una función de uno de los números
59. El perímetro de un rectángulo es 200 pulg. Exprese el área del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.

60. Expresé el área del rectángulo sombreada en la figura como una función de x



61. Expresé como una función de x la distancia de un punto (x, y) sobre la gráfica de $x + y = 1$ al punto $(2, 3)$.

62. Expresé el perímetro de un cuadrado como una función de su área A

63. Expresé el diámetro de un círculo como una función de su circunferencia C

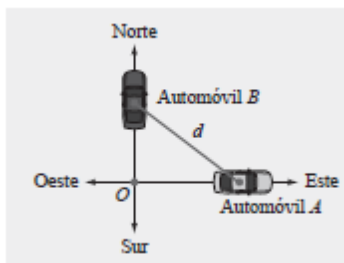
64. Expresé el área de un triángulo equilátero como una función de su altura h

65. Un alambre de longitud x se dobla en forma de círculo. Expresé el área del círculo como una función de x

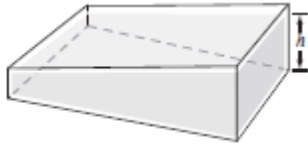
66. Un ranchero desea cercar un corral rectangular cuya área es de 1000 pies² usando dos tipos de vallas distintos. A lo largo de dos lados paralelos, la valla cuesta \$4 por pie. Para los otros dos lados paralelos, la valla cuesta \$1.60 por pie. Expresé el costo total para cercar el corral como una función de la longitud de uno de los lados con valla que cuesta \$4 por pie

67. Una empresa desea construir una caja rectangular abierta con un volumen de 450 pulg³, de modo que la longitud de su base sea tres veces su ancho. Expresé el área superficial de la caja como una función de su ancho.

68. El automóvil A pasa por el punto O en dirección al este a velocidad constante de 40 mi/h ; el automóvil B pasa por el mismo punto 1 hora después en dirección al norte a velocidad constante de 80 mi/h . Expresé la distancia entre los automóviles como una función del tiempo t , donde t se mide empezando cuando el automóvil B pasa por el punto O (ver figura)



69. La piscina que se muestra en la figura mide 3 pies de profundidad en la parte poco profunda, 8 pies en la profunda, 40pies de largo, 30 pies de ancho y el fondo es un plano inclinado. Hacia la piscina se bombea agua. Expresé el volumen del agua en la piscina como una función de la altura h del agua por arriba del extremo profundo. [Sugerencia: el volumen es una función definida por partes con dominio definido por $0 \leq h \leq 8$]



70. Si una máquina de U\$ 300.000 se deprecia 2% de su valor original cada año, determine una función lineal que exprese el valor V de la máquina después que han transcurrido t años
71. En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial es de U\$850 y todos los costos adicionales son de U\$3 por cada unidad producida.
- Exprese el costo total C como una función lineal del número q de unidades producidas.
 - ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de U\$ 1600?
72. Para estimular las ventas a grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si el grupo es menor o igual a 12 personas, cada boleto cuesta U\$9.50. Si el grupo es mayor a 12 personas, cada boleto cuesta U\$ 8.75. Escriba una función definida por partes para representar el costo de comprar n boletos.
73. Un fabricante vende un producto a \$8.35 por unidad y vende todo lo que produce. Los costos fijos son de \$2116 y el costo variable es de \$7.20 por unidad.
- ¿A qué nivel de producción existirán utilidades de \$4600?
 - ¿A qué nivel de producción habrá una pérdida de \$1150?
 - ¿A qué nivel se alcanza el punto de equilibrio?

Nota: en el problema que sigue, x representa el número de artículos de un cierto producto y p el precio por artículo. Si x es el número de artículos demandado por los compradores y p el precio que pagan los compradores por cada artículo, entonces la ecuación que relaciona a x con p se denomina **ecuación de demanda**. Si x es el número de artículos ofertado por los fabricantes o vendedores y p el precio de venta de cada artículo, entonces la ecuación que relaciona a x con p se denomina **ecuación de oferta**. La curva de la ecuación de demanda es decreciente porque los compradores demandan más artículos cuando el precio baja. La curva de oferta es creciente porque cuando el precio sube los fabricantes ofrecen más cantidad de artículos. El punto de intersección de estas dos curvas se denomina **punto de equilibrio**. La función ingreso R , se define como $R(x) = xp$, donde x es el número de unidades demandadas y p el precio por artículo determinado en la ecuación de demanda.

74. Las ecuaciones de oferta y demanda para un cierto producto son $35x - 2p + 250 = 0$ y $65x + p - 537.5 = 0$ respectivamente, donde p representa el precio por unidad en dólares y x el número de unidades vendidas.
- Encuentre el precio de equilibrio.
 - Encuentre la ecuación de ingreso del fabricante cuando se demandan x unidades