

Solución del examen final de Cálculo III.

B

Fecha: 22 de noviembre de 2017.

Duración: 80 minutos.

I. (10 puntos: 5 si plantea bien la integral y 5 si la resuelve correctamente) Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ a través de la superficie S , esto es:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$$

Donde \vec{N} es el vector unitario normal a S dirigido hacia arriba. $S: z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$.

Solución.

En este caso $G(x, y, z) = z - g(x, y) = x^2 + y^2 + z - 9$, por tanto, $\vec{\nabla}G(x, y, z) = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + \hat{k}$. Sustituyendo se tiene:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_R \vec{F} \cdot \vec{\nabla}G(x, y, z) dA = \iint_R [2x^2 + 2y^2 + z] dA = \iint_R [2x^2 + 2y^2 + (9 - x^2 - y^2)] dA$$

$= \iint_R [x^2 + y^2 + 9] dA$. Cambiando a coordenadas polares se tiene que $0 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. De donde

$$\iint_R [x^2 + y^2 + 9] dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (r^2 + 9) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{9r^2}{2} \right) \Big|_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4} + \frac{81}{2} \right) d\theta = \frac{243\pi}{2}.$$

II. (10 puntos: 5 si plantea bien la integral y 5 si la resuelve correctamente) Utilizar el **teorema de Green** para evaluar la integral de línea:

$$\int_C (\sin x \cos y) dx + (xy + \cos x \sin y) dy$$

C : Frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$.

Solución.

En este caso $M(x, y) = \sin x \cos y$ y $N(x, y) = (xy + \cos x \sin y)$. Por tanto, $\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin x \sin y$

y $\frac{\partial N}{\partial x} = y - \sin x \sin y$. Aplicando el teorema de Green $\oint_c \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int M(x, y)dx + N(x, y)dy =$

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_R [(y - \sin x \sin y) - (-\sin x \sin y)] dA = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{12}.$$

III. (15 puntos) Considerando el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x)\hat{i} + 2xy\hat{j}$.

a) (5 puntos) Determine si el campo $\vec{F}(x, y)$ es conservativo.

Solución.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$. Dado que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ se concluye que el campo es conservativo.

b) (5 puntos) Si $\vec{F}(x, y)$ resulta conservativo halle una función de potencial. En caso contrario indique que no aplica.

Solución.

Por ser $\vec{F}(x, y)$ conservativo, se cumple que $\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla} f(x, y)$. De ahí que $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$. Integrando la primera con respecto a x se tiene que $f(x, y) = \int (y^2 - x) dx = xy^2 - \frac{x^2}{2} + g(y)$. Derivando esta expresión con relación a “ y ” se obtiene $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + g'(y)$. Igualando expresiones se tiene $2xy + g'(y) = 2xy$, es decir, $g'(y) = 0$. Integrando esta expresión con respecto a “ y ” se obtiene $g(y) = c$. Por tanto una expresión para el potencial es:

$$f(x, y) = xy^2 - \frac{x^2}{2} + c$$

c) (5 puntos) Halle el trabajo $W = \int_c \vec{F} \bullet d\vec{r}$ realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y)$ al desplazar un objeto desde el punto $(2, 1)$ hasta el punto $(3, 0)$.

Solución.

Por ser $\vec{F}(x, y)$ conservativo, el trabajo no depende de la trayectoria, sólo de los puntos inicial y final, por tanto, utilizando la función de potencial se tiene:

$$W = \int_c \vec{F} \bullet d\vec{r} = f(3, 0) - f(2, 1) = -\frac{9}{2}.$$

IV. (15 puntos: 5 si calcula la divergencia y 10 si resuelve correctamente la integral) Utilizar el **teorema de la divergencia** para hallar el flujo de $\vec{F}(x, y, z) = x^3\hat{i} + x^2y\hat{j} + x^2e^y\hat{k}$ dirigido hacia el exterior, a través de la superficie del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones. $S: z = 4 - y, z = 0, x = 0, x = 6, y = 0$.

Solución.

Cálculo de la divergencia: $div \vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla} \bullet \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 4x^2$.

Por el **teorema de la divergencia**:

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_Q 4x^2 dV = \int_0^6 \int_0^4 \int_0^{4-y} 4x^2 dz dy dx = \int_0^6 \int_0^4 4x^2(4-y) dy dx \\ &= \int_0^6 32x^2 dx = 2304.\end{aligned}$$