SOLO se permiten preguntas acerca del enunciado.NO se permite ningun tipo de apuntes, notas, cuadernos o libros durante el examen. NO se permite el uso ni la posesión de aparatos electronicos durante el examen. El examen es individual y NO se permite hablar durante el examen. NO se permite el prestamo de materiales durante el examen (esfero, borrador, etc.). Si necesita algo pidalo en voz alta al profesor. Cualquier violacion a estas reglas es causal de anulación del examen (NOTA EXAMEN= 0.0). TODA sospecha de posible caso de fraude academico y/o falta disciplinaria sera reportada. En caso de sentirse mal, favor acudir a los servicios médicos de la universidad de inmediato.

Nombre completo y codigo: ____________________

1. Considere la curva $r(t) = (\cos(t), \sin(t), 2t)$. Determine

- La velocidad en $t = \pi$

Solution: Derivando $r'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 2)$, asi que en $t = \pi$ tenemos $r'(\pi) = (-\sin(\pi), \cos(\pi), 2) = (0, -1, 2)$.

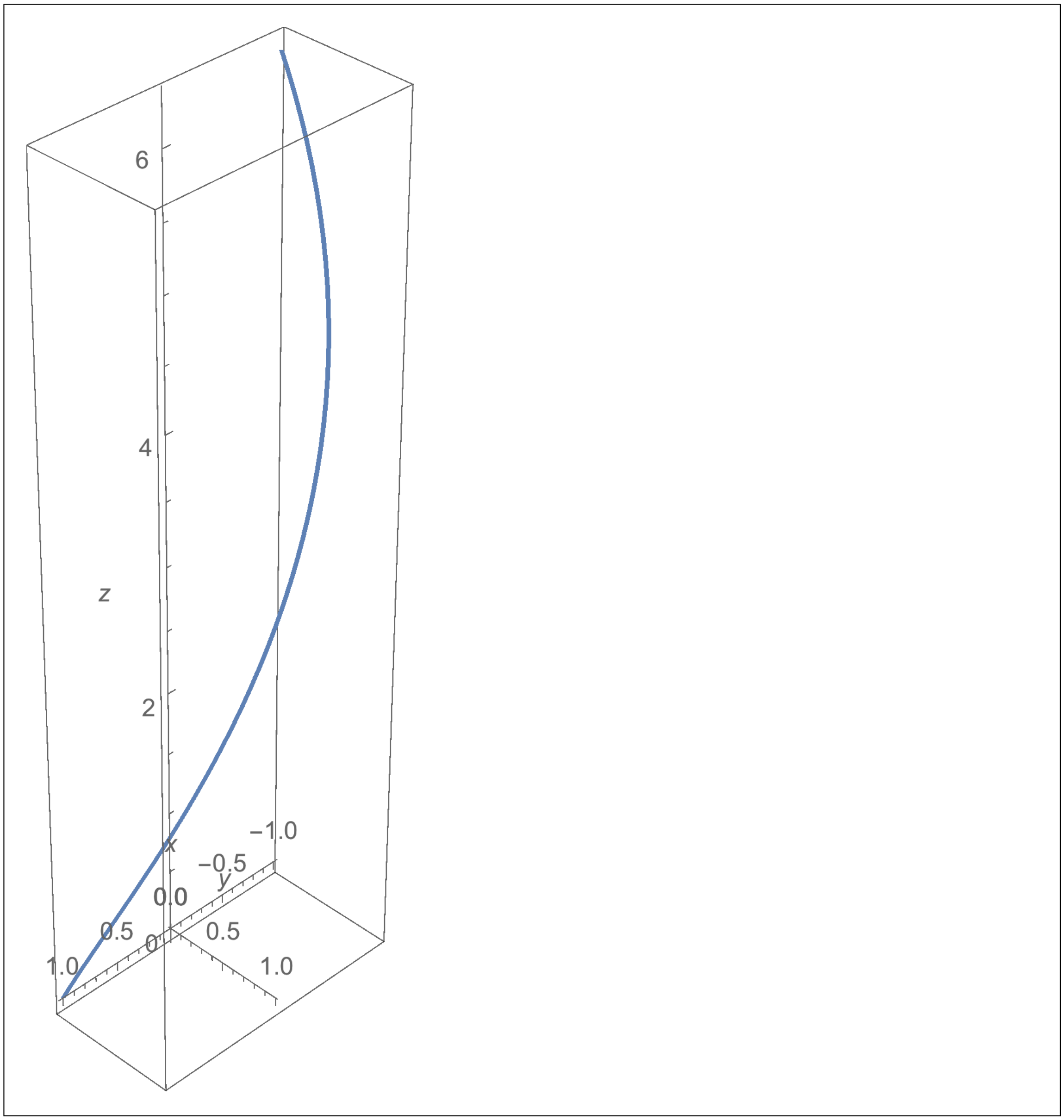
- La aceleración en $t = \pi$

Solution: Derivando otra vez $r''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$, asi que en $t = \pi$ tenemos $r''(\pi) = (-\cos(\pi), \sin(\pi), 0) = (1, 0, 0)$.

- La longitud de arco de la curva para $0 \leq t \leq \pi$.

Solution: La rapidez es $||r'(t)|| = ||(0, -1, 2)|| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, por lo que

$$L = \int_0^\pi ||r'(t)||dt = \int_0^\pi \sqrt{5}dt = \pi\sqrt{5}$$



2. Considere la curva parametrica $r(t) = (1+t+t^2, 2t+t^2, 2+4t)$

- Calcular la recta tangente en el punto $(1,0,2)$.

Solution: Primero encontremos el valor de t para el cual $r(t) = (1,0,2)$. De la definicion de $r(t)$ tenemos $1 = 1+t+t^2, 0 = 2t+t^2, 2 = 2+4t$ que tiene como solucion $t = 0$.
Calculamos $r'(t) = (1+2t, 2+2t, 4)$ y la recta tangente en $(1,0,2)$ tiene como vector director $r'(0) = (1,2,4)$. La ecuacion de la recta tangente en el punto $(1,0,2)$ es $(1,0,2)+t(1,2,4)$

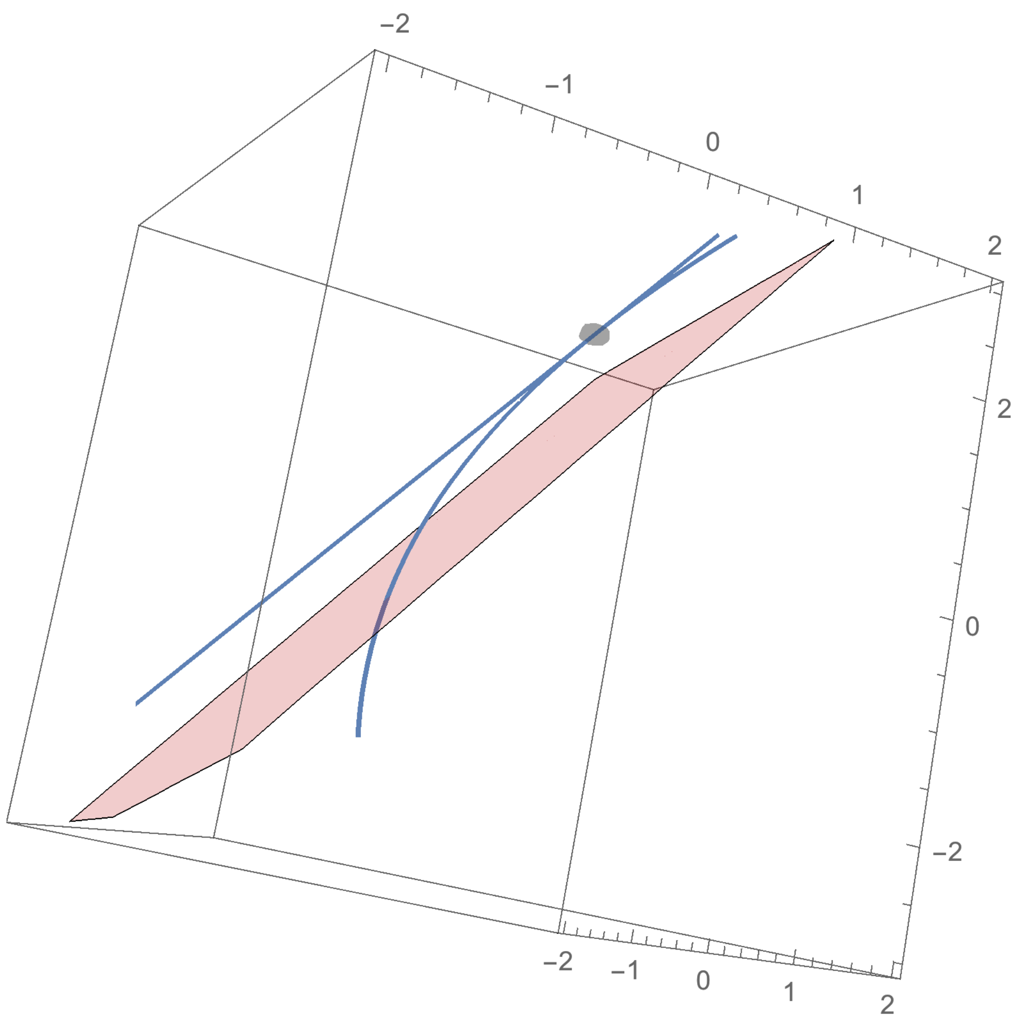
- Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(-2,1,2)$ y que es paralela a la recta tangente en el punto $(1,0,2)$.

Solution: Como el plano debe contener los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(-2,1,2)$ entonces el vector $PQ = (-2,1,2)-(1,0,1) = (-3,1,1)$ debe ser paralelo al plano. Como tambien debe ser paralelo a la recta tangente en el punto $(1,0,2)$ entonces el vector director de esa recta tambien debe ser paralelo al plano. Como tenemos que los vectores $(-3,1,1)$ y $(1,2,4)$ son paralelos al plano, tomando el producto cruz obtenemos un vector normal al plano. $(-3,1,1)\times(1,2,4) = (2,13,-7)$. Como debe contener el punto $(1,0,1)$ entonces la ecuacion del plano es

$$2(x-1)+13(y-0)-7(z-1)=0$$

es decir

$$2x+13y-7z=-5$$



3. Considere una pista para carros con forma de elipse definida por la ecuación

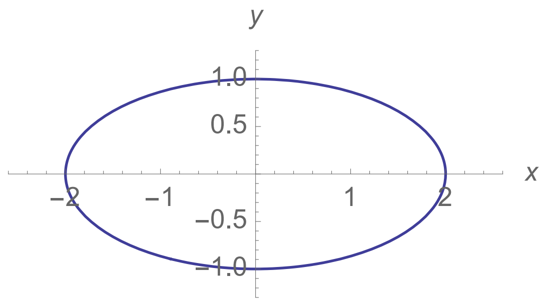
$$x^2+4y^2=4$$

- Parametrice la elipse.

Solution: Dividimos por 4 para obtener

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

parametrizamos $r(t) = (2\cos(t), \sin(t))$.



- Halle la curvatura para todo tiempo t y encuento la curvatura maxima y minima y los puntos donde se obtiene.

Solution: Calculamos

$$r'(t) = (-2\sin(t), \cos(t))$$

y

$$r''(t) = (-2\cos(t), -\sin(t))$$

el producto cruz es

$$(0, 0, 2\sin^2(t) + 2\cos^2(t))$$

que tiene norma $||r'(t) \times r''(t)|| = 2$. La rapidez es $||r'(t)|| = \sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}$. La curvatura es:

$$\kappa(t) = \frac{2}{(4\sin^2(t) + \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

Para encontrar el punto de curvatura maxima y minima, minimizamos/maximizamos la funcion $4\sin^2(t) + \cos^2(t)$. Derivando obtenermos $8\sin(t)\cos(t) - 2\cos(t)\sin(t) = 6\sin(t)\cos(t)$. Para que esta sea cero $\cos(t)\sin(t) = 0$ y esto pasa en $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.
Evaluando $\kappa(0) = 2, \kappa(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}, \kappa(\pi) = 2, \kappa(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{4}$. Asi que los valores minimos de curvatura son en $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. y los valores maximos $t = 0, \pi$. Estos puntos corresponden a $(0, \pm 1)$ para curvatura minima y $(\pm 2, 0)$ curvatura maxima.

- La pista la recorre un carro de con rapidez constante, cuánto es la aceleración tangencial?. En que puntos se tiene la aceleración normal máxima y mínima?

Solution: Si la rapidez es constante la aceleracion tangencial es

$$a_T = \frac{d||r'(t)||}{dt} = \frac{d}{dt} constante = 0$$

La acelaracion normal esta dada por

$$\kappa(t)||r'(t)||^2$$

como la rapidez es contante, la aceleracion normal es maxima cuando la curvatura es maxima y la aceleracion normal es minima cuando la curvatura es minima. $(0, \pm 1)$ aceleracion normal minima y $(\pm 2, 0)$ aceleracion normal maxima.

- La pista la recorre un carro de con rapidez constante, es la aceleración normal en los puntos $(2, 0)$ y $(0, 1)$ igual?, es el vector aceleración en los puntos $(2, 0)$ y $(0, 1)$ igual?

Solution: Como la aceleracion normal esta dada por

$$\kappa(t)||r'(t)||^2$$

en los puntos $(2, 0)$ y $(0, 1)$ la aceleracion normal es distinta porque la curvatura es distinta. Como la aceleracion tangencial es cero y la aceleracion normal es distinta entonces la aceleracion es tambien dintinta.

- La pista la recorre un carro de tal manera que en el punto $(2, 0)$ su rapidez es de 100. Determine la rapidez a la cuál debe andar el carro en el punto $(0, 1)$ de tal manera que su aceleración normal en ese punto sea igual a la aceleración normal en el punto $(2, 0)$.

Solution: Como $a_N = \kappa(t)||r'(t)||$ en el punto $(2, 0)$ sabemos que la curvatura es 2 por lo que

$$a_N = 2 \times 100^2$$

en el punto $(0, 1)$ la curvatura es $\frac{1}{4}$ asi que

$$a_N = \frac{1}{4}||r'||^2$$

igualando

$$2 \times 100^2 = \frac{1}{4}||r'||^2$$

por lo que $||r'|| = 100\sqrt{8}$.

Recuerde que la aceleraci on de un objeto est a dada por la ecuaci on

$$\kappa(t) = \frac{||r'(t) \times r''(t)||}{||r'(t)||^3}$$

$$a(t) = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N} = \frac{d||r'(t)||}{dt}\mathbf{T} + \kappa(t)||r'(t)||^2\mathbf{N}$$