

Barranquilla, 27-09-2018

UNIVERSIDAD DEL NORTE  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
CÁLCULO III  
PARCIAL 2

Nombre y Código: \_\_\_\_\_

Duración: 100 minutos

1. Dada la función  $w(p, q, r) = qr \cos(p)$ , con  $p = y \sin x$ ,  $q = x^2 z^{-3}$ ,  $r = \frac{x}{6z}$ , utilizando regla de la cadena calcular  $\frac{\partial w}{\partial z}$ , cuando  $x = \pi$ ,  $y = 1$  y  $z = 1$ .
2. Encuentre la derivada direccional de la siguiente función en el punto  $P$  y en la dirección del vector  $\vec{u}$ :  
$$h(x, y, z) = \sin(xy) - 3e^{yz} + \ln(zx)$$
con  $P = (1, 0, \frac{1}{2})$  y  $\vec{u} = (1, 2, 2)$
3. Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto específico.  
$$5x^2 - y^2 + 4z^2 = 8; \quad (-2, 2, 1)$$
4. Determine los máximos relativos, mínimos relativos y puntos silla de la siguiente función.  
$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$$
5. [Opcional:] Un fabricante tiene \$8000 para gastar en el desarrollo y promoción de un nuevo producto. Se estima que si  $x$  miles de dólares se gastan en desarrollo y  $y$  miles de dólares se gastan en promoción, las ventas serán aproximadamente  $f(x, y) = 50x^{1/2}y^{3/2}$  unidades. ¿Cuánto dinero debe asignar el fabricante a desarrollo y cuánto a promoción para maximizar las ventas?

**OBSERVACIONES:**

- El punto opcional (5) tiene una bonificación de 0,5 si está excelente.
- Todos los puntos tienen igual valoración.
- El uso de celulares y cualquier dispositivo tecnológico es causal de anulación.

### SOLUCIÓN

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = (-9r \operatorname{sen}(\rho)) (0) + (r \cos(\rho)) (-3x^2 z^{-4}) + (9 \cos(\rho)) \left( \frac{-x}{6z^2} \right)$$

$$\rho \Big|_{\substack{x=\pi \\ y=1 \\ z=1}} = 0 \quad ; \quad \rho \Big|_{\substack{x=\pi \\ y=1 \\ z=1}} = \pi^2 \quad ; \quad v \Big|_{\substack{x=\pi \\ y=1 \\ z=1}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Así,} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{\substack{x=\pi \\ y=1 \\ z=1}} = \left( \frac{\pi}{6} \right) (-3\pi^2) + (\pi^2) \left( -\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{2\pi^3}{3}$$

---

$$\textcircled{2} \quad \nabla h(x, y, z) = \left( y \cos(xy) + \frac{1}{x}, x \cos(xy) - 3z e^{yz}, -3y e^{yz} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\nabla h\left(1, 0, \frac{1}{2}\right) = \left( 1, -\frac{1}{2}, 2 \right)$$

$$U_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$D_u h\left(1, 0, \frac{1}{2}\right) = \left( 1, -\frac{1}{2}, 2 \right) \cdot \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

---

$$\textcircled{3} \quad \nabla f(x, y, z) = (10x, -2y, 8z)$$

$$\nabla f(-2, 2, 1) = (-20, -4, 8)$$

Ecuación del plano tangente.

$$-20(x+2) - 4(y-2) + 8(z-1) = 0$$

$$-20x - 4y + 8z = 40$$

$$\textcircled{4} \quad f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$$

$$f_x = 3x^2 - 6y + 9 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$f_y = 2y - 6x + 5 = 0 \rightarrow y = 3x - \frac{5}{2} \quad \textcircled{2}$$

DE  $\textcircled{2}$  EN  $\textcircled{1}$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 4$$

$$\cdot \text{ SI } x = 2 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$$

$$\cdot \text{ SI } x = 4 \Rightarrow y = \frac{19}{2}$$

PUNTOS CRÍTICOS :  $(2, \frac{7}{2})$  ,  $(4, \frac{19}{2})$

$$D(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6x)(2) - 36 = 12x - 36$$

$$D(2, \frac{7}{2}) = -12 < 0 \Rightarrow \text{ EN } (2, \frac{7}{2}) \text{ HAY UN PUNTO SILLA.}$$

$$D(4, \frac{9}{2}) = 12 > 0$$

$$f_{xx}(4, \frac{9}{2}) = 24 > 0 \Rightarrow \text{ EN } (4, \frac{9}{2}) \text{ HAY UN MÍNIMO.}$$

$$\textcircled{5} \quad F(x,y,\lambda) = 50x^{1/2}y^{3/2} - \lambda(x+y-8000)$$

$$F_x = 25x^{-1/2}y^{3/2} - \lambda = 0$$

$$\rightarrow \lambda = 25x^{-1/2}y^{3/2}$$

$$\rightarrow 25x^{-1/2}y^{3/2} = 75x^{1/2}y^{1/2}$$

$$F_y = 75x^{1/2}y^{1/2} - \lambda = 0$$

$$\rightarrow \lambda = 75x^{1/2}y^{1/2}$$

$$\boxed{y = 3x} \quad \textcircled{1}$$

$$F_\lambda = -(x+y-8000) = 0 \quad \textcircled{3}$$

DE  $\textcircled{1}$  EN  $\textcircled{3}$

$$4x = 8000$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2000} \Rightarrow \boxed{y = 6000}$$

SE DEBE ASIGNAR \$ 2000 EN GASTOS DE DESARROLLO Y \$ 6000 EN GASTOS DE PROMOCIÓN PARA MAXIMIZAR LAS VENTAS.