Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen parcial 2 - Cálculo 3 - 2018 - 30

# A

**Instrucciones generales:** Durante el examen no está permitido: Hablar con sus compañeros, prestar materiales, el uso de calculadoras, notas de clases, textos, ni aparatos electrónicos. La posesión de un celular es causal de anulación. El tiempo máximo para realizar el examen es de 100 minutos.

(I) (10 Puntos) Indique si la proposición dada es falsa o verdadera.

(1) ( ) La función $f(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$ tiene dominio $\mathbb{R}^2$

(2) ( ) 0 pertenece al rango o imagen de $f(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$

(3) ( ) La función $f(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$ es continua en $(0,0)$

(4) ( ) Las curvas de nivel de $f(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$ son circunferencias

(5) ( ) Dos diferentes curvas de nivel de la gráfica de $z = f(x,y)$ pueden intersecarse.

(6) ( ) Si $f$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y $f(0,0) = 0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

(7) ( ) Si $z(x,y) = f(x)g(y)$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$

(8) ( ) $\nabla f(a,b,c)$ es ortogonal al vector normal del plano tangente a la superficie $z = f(x,y,z)$ en $(a,b,c)$

(9) ( ) Si $z(x,y) = e^{x+y}$, entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$

(10) ( ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}$ no existe

(II) (15 Puntos) Indique en cada caso la respuesta correcta.

(1) Si $f(x,y) = x^2\sin(2y)$ y $\vec{u} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$, entonces la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(1,\pi/2)$ es igual a

*a*) $8/5$

*b*) $3/5$

*c*) $1/5$

*d*) $0$

*e*) Ninguna anterior

(2) La ecuación del plano tangente a la superficie $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ en el punto $(1,-1,4)$ está dada por

*a*) $x + y - 2z + 6 = 0$

*b*) $x - y + 2z + 6 = 0$

*c*) $x - y - 2z + 6 = 0$

*d*) $x - y - 2z - 6 = 0$

*e*) Ninguna anterior

(3) La a recta normal a la superficie dada por $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ en el punto $(1, -1, 4)$ tiene ecuaciones simétricas dadas por

*a*) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}$
*b*) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$
*c*) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}$
*d*) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{2}$
*e*) Ninguna anterior

(III) (15 Puntos) Indique en cada caso la correcta.

Considere la función
$$f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y.$$

(1) El vector gradiente de $f$ en un punto $(x, y)$ es

*a*) $(9x^2 - 9)\hat{\imath} - (2y + 4)\hat{\jmath}$
*b*) $(9x^2 - 9)\hat{\imath} + (2y - 4)\hat{\jmath}$
*c*) $(9x^2 - 9)\hat{\imath} + (2y + 4)\hat{\jmath}$
*d*) $(9x^2 + 9)\hat{\imath} + (2y + 4)\hat{\jmath}$
*e*) Ninguna anterior

(2) Los punto críticos de $f$ son

*a*) $(1, -2)$ y $(1, 2)$
*b*) $(1, -2)$ y $(-1, 2)$
*c*) $(1, 2)$ y $(-1, -2)$
*d*) $(1, -2)$ y $(-1, -2)$
*e*) Ninguna anterior

(3) Los puntos críticos de $f$ se clasifican así

*a*) mínimo local en $(1, -2)$ y punto de silla en $(1, 2)$
*b*) mínimo local en $(1, -2)$ y punto de silla en $(-1, -2)$
*c*) máximo local en $(1, -2)$ y punto de silla en $(-1, -2)$
*d*) máximo local en $(1, 2)$ y punto de silla en $(-1, -2)$
*e*) Ninguna anterior

(IV) (10 Puntos)

Determine las dimensiones de un cilindro circular recto con volumen $k$ unidades cúbicas y área superficial mínima

**Importante:** Para obtener la puntuación máxima en cada ejercicio (salvo el punto I) debe justificar formalmente sus argumentos en la hoja cuadriculada. Respuestas sin justificaciones no serán consideradas.

Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen parcial 2 - Cálculo 3 - 2018 - 30

# B

**Instrucciones generales:** Durante el examen no está permitido: Hablar con sus compañeros, prestar materiales, el uso de calculadoras, notas de clases, textos, ni aparatos electrónicos. La posesión de un celular es causal de anulación. El tiempo máximo para realizar el examen es de 100 minutos.

(I) (10 Puntos) Indique si la proposición dada es falsa o verdadera.

(1) (      ) La función $f(x, y) = \frac{4x}{x^2+y^2+1}$ tiene dominio $\mathbb{R}^2$

(2) (      ) 0 no pertenece al rango o imagen de $f(x, y) = \frac{4x}{x^2+y^2+1}$

(3) (      ) La función $f(x, y) = \frac{4x}{x^2+y^2+1}$ no es continua en $(0, 0)$

(4) (      ) Las curvas de nivel de $f(x, y) = e^{1-x^2-y^2}$ son circunferencias

(5) (      ) Dos curvas de nivel distintas de $z = f(x, y)$ siempre tienen intersección vacía

(6) (      ) Si $f$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y $f(0, 0) = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

(7) (      ) Si $z(x, y) = f(x)g(y)$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$

(8) (      ) $\nabla f(a, b, c)$ es ortogonal al vector normal del plano tangente a la superficie $z = f(x, y, z)$ en $(a, b, c)$

(9) (      ) Si $z(x, y) = e^{x-y}$, entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$

(10) (      ) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2} = 0$

(II) (15 Puntos) Indique en cada caso la respuesta correcta.

(1) Si $f(x, y) = x^2 \sin(2y)$ y $\vec{u} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, entonces la derivada direccional $D_{\vec{u}} f(1, \pi/2)$ es

*a)* -8/5
*b)* 3/5
*c)* -1/5
*d)* 0
*e)* Ninguna anterior

(2) El plano tangente a la superficie $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 12$ en el punto $(1, -1, 4)$ tiene ecuación

*a)* $x + y - 2z + 6 = 0$
*b)* $x - y + 2z + 6 = 0$
*c)* $x - y - 2z + 6 = 0$
*d)* $x - y - 2z - 6 = 0$
*e)* Ninguna anterior

(3) La a recta normal a la superficie dada por $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = -12$ en el punto $(1, -1, 4)$ tiene ecuaciones simétricas dadas por

*a*) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}$

*b*) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$

*c*) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}$

*d*) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{2}$

*e*) Ninguna anterior

(III) (15 Puntos) Indique en cada caso la correcta.

Considere la función

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(1) El vector gradiente de $f$ en un punto $(x, y)$ es

*a*) $(3x^2 - 3y)\hat{\imath} + (3y^2 + 3x)\hat{\jmath}$

*b*) $(3x^2 + 3y)\hat{\imath} + (3y^2 - 3x)\hat{\jmath}$

*c*) $(3x^2 - 3y)\hat{\imath} - (3y^2 - 3x)\hat{\jmath}$

*d*) $(3x^2 - 3y)\hat{\imath} + (3y^2 - 3x)\hat{\jmath}$

*e*) Ninguna anterior

(2) Los puntos críticos de $f$ son

*a*) $(0, 0)$

*b*) $(1, 1)$

*c*) $(0, 0)$ y $(1, 1)$

*d*) $(0, 0)$ y $(-1, -1)$

*e*) Ninguna anterior

(3) Los puntos críticos de $f$ se clasifican así

*a*) punto de silla en $(0, 0)$

*b*) mínimo local en $(1, 1)$

*c*) mínimo local en $(1, 1)$ y punto de silla en $(0, 0)$

*d*) mínimo local en $(0, 0)$ y punto de silla en $(1, 1)$

*e*) Ninguna anterior

(IV) (10 Puntos) Encuentre el punto del plano $2x - 2y + z = 4$ que está más cerca del origen.

**Importante:** Para obtener la puntuación máxima en cada ejercicio (salvo el punto I) debe justificar formalmente sus argumentos en la hoja cuadriculada. Respuestas sin justificaciones no serán consideradas.