

Barranquilla, 24-10-2018

UNIVERSIDAD DEL NORTE  
CÁLCULO III  
PARCIAL 3

Nombre y Código: \_\_\_\_\_

Duración: 90 minutos

1. [1.25 ptos.] Para la integral doble  $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy dx$ :

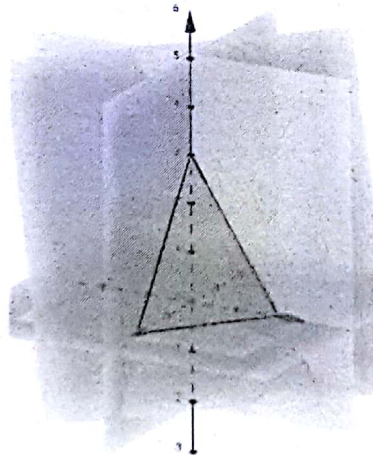
a) [0.4 ptos.] Dibuje la región de integración.

b) [0.85 ptos.] Escriba la integral dada como una integral equivalente con el orden de integración invertido.

2. (1.25 Ptos.) Evalúe la integral.

$$\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2} dA$$

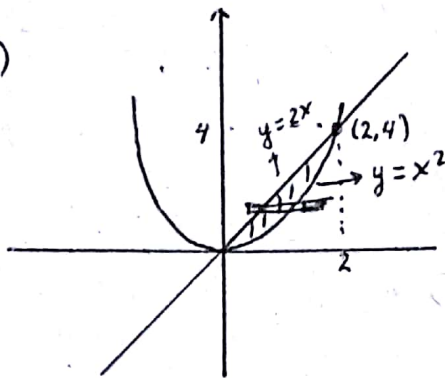
Donde R es el primer cuadrante limitado por la circunferencia de radio 3.

3. (1.25 Ptos.) Encuentre el volumen del sólido que está encerrado por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .4. [1.25 ptos.] Calcule la integral  $\iiint_E (2x) dV$ , donde E es el tetraedro limitado por  $3x + y + 2z = 6$  y los planos coordenados.

SOLUCIÓN

①

a)

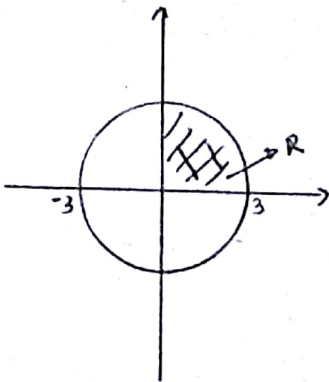


$$y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$y = 2x \rightarrow x = \frac{y}{2}$$

$$b) \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y) dy dx = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx dy$$

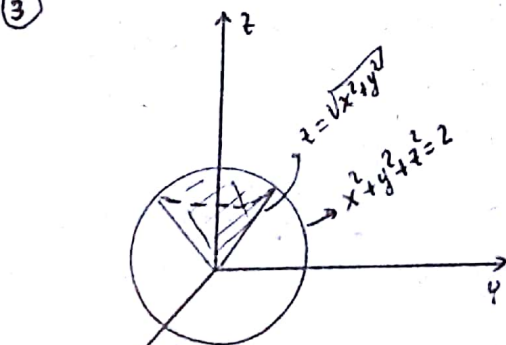
②



$$\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r (r^2)^{3/2} dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r^4 dr d\theta = \theta \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(3)^5}{5} = \frac{243\pi}{10}$$

③



$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$2z^2 = 2$$

$$z = 1$$

como  $z = \rho \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $\phi = \pi/4$

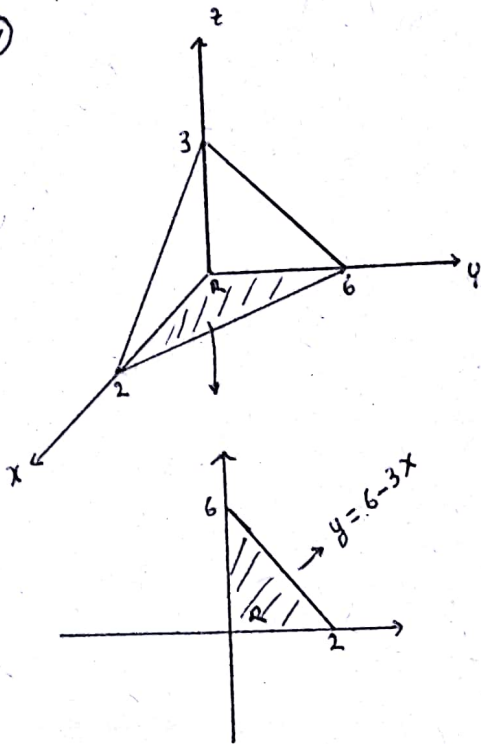
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$V = \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} \cdot (-\cos \phi) \Big|_0^{\pi/4} \cdot \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$V = \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \cdot (2\pi)$$

$$V = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi (2 - \sqrt{2})$$

④



$$\begin{aligned} \iiint_E 2x \, dv &= \int_0^2 \int_0^{6-3x} \int_0^{\frac{6-3x-y}{2}} 2x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{6-3x} 2x \, z \Big|_0^{\frac{6-3x-y}{2}} \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{6-3x} 2x \left( 3 - \frac{3}{2}x - \frac{y}{2} \right) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{6-3x} (6x - 3x^2 - yx) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left( 6xy - 3x^2y - \frac{y^2x}{2} \Big|_0^{6-3x} \right) \, dx \\ &= \int_0^2 \left( 6x(6-3x) - 3x^2(6-3x) - \frac{(6-3x)^2x}{2} \right) \, dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^2 \left( 36x - 18x^2 - 18x^2 + 9x^3 - \frac{(36 - 36x + 9x^2)x}{2} \right) \, dx$$

$$= \int_0^2 \left( 36x - 36x^2 + 9x^3 - 18x + 18x^2 - \frac{9}{2}x^3 \right) \, dx = \int_0^2 \left( 18x - 18x^2 + \frac{9}{2}x^3 \right) \, dx$$

$$= \left( 9x^2 - \frac{18}{3}x^3 + \frac{9}{8}x^4 \right) \Big|_0^2 = 9 - \frac{18}{3} + \frac{9}{8} = \frac{99}{24}$$