• Un objeto parte del reposo del punto $P(1,2,0)$ y se mueve con una aceleración $a(t) = j + 2K$ donde $\|a(t)\|$ se mide en pies por segundos al cuadrado. Hallar la posición del objeto después de $t=2$ segundos.

Desarrollo.

Como el objeto parte del reposo se tiene que $V(0)=0$, y como el objeto parte del punto $(x,y,z)=(1,2,0)$ se cumple que

$r(0) = x(0)i + y(0)j + z(0)K = i + 2j$.

Debemos integrar dos veces para hallar la función de posición, usando en cada integral las condiciones iniciales para obtener la constante de integración.

El vector velocidad es

$v(t) = \int a(t)\,dt = \int (j+2K)\,dt = tj + 2tK + c$, donde $c = C_1 i + C_2 j + C_3 K$.

Haciendo $t=0$ y aplicando la condición inicial $V(0)=0$, se obtiene

$V(0) = C_1 i + C_2 j + C_3 K = 0$, así que $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

Luego, la velocidad en cualquier instante t es $V(t) = tj + 2tK$.

Integrando una vez más obtenemos

$r(t) = \int v(t)\,dt = \int (tj + 2tK)\,dt = \frac{t^2}{2} j + t^2 K + c$, $c = C_4 i + C_5 j + C_6 K$.

Haciendo $t=0$ y aplicando la condición inicial $r(0) = i + 2j$, obtenemos

$r(0) = C_4 i + C_5 j + C_6 K = i + 2j$. En consecuencia, $C_4 = 1$, $C_5 = 2$ y $C_6 = 0$.

Por lo tanto, el vector posición es $r(t) = i + \left(\frac{t^2}{2} + 2\right) j + t^2 K$.

La posición del objeto después de $t=2$ segundos está dada por

$r(2) = i + 4j + 4K$.

• Una pelota de béisbol es golpeada 3 pies sobre el nivel del suelo a 100 pies por segundo y con un ángulo de $45°$ respecto al suelo. Hallar la altura máxima que alcanza la pelota de béisbol. ¿Pasará por encima de una valla de 10 pies de altura localizada a 300 pies del plato de lanzamiento?

Desarrollo.

Tenemos que $h = 3$ pies, $v_0 = 100$ pies/s, $\theta = 45°$ y $g = 32$ pies/s². Luego

$$r(t) = \left(100 \operatorname{Cos}\frac{\pi}{4}\right)t\,i + \left[3 + \left(100 \operatorname{Sen}\frac{\pi}{4}\right)t - \frac{1}{2}(32)t^2\right]j$$

$$= \left(100\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t\,i + \left[3 + \left(100\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t - 16t^2\right]j = \left(50\sqrt{2}\,t\right)i + \left[3 + 50\sqrt{2}\,t - 16t^2\right]j$$

$$= x(t)\,i + y(t)\,j.$$

La altura máxima se alcanza cuando $y'(t) = 50\sqrt{2} - 32t = 0$. Así que

$$50\sqrt{2} - 32t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{50\sqrt{2}}{32} \Leftrightarrow t = \frac{25}{16}\sqrt{2} \approx 2.21 \text{ segundos.}$$

Luego, la altura máxima que alcanza la pelota es

$$y = 3 + 50\sqrt{2}\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right) - 16\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right)^2 = \frac{649}{8} = 81 \text{ pies.}$$

La pelota se encontrará a 300 pies de donde fue golpeada cuando

$300 = x(t) = 50\sqrt{2}\,t.$

Entonces $50\sqrt{2}\,t = 300 \Leftrightarrow t = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ segundos. En este instante, la altura de la pelota es $y = 3 + 50\sqrt{2}(3\sqrt{2}) - 16(3\sqrt{2})^2 = 15$ pies.

En consecuencia, la pelota pasará sobre la valla de 10 pies de altura.

• Hallar la curvatura de la curva $r(t) = 4\cos 2\pi t\, i + 4\operatorname{Sen} 2\pi t\, j$.

Desarrollo.

$r'(t) = -8\pi \operatorname{Sen} 2\pi t\, i + 8\pi \cos 2\pi t\, j$ y $r''(t) = -16\pi^2 \cos 2\pi t\, i - 16\pi^2 \operatorname{Sen} 2\pi t\, j$.

Ahora,

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8\pi \operatorname{Sen} 2\pi t & 8\pi \cos 2\pi t & 0 \\ -16\pi^2 \cos 2\pi t & -16\pi^2 \operatorname{Sen} 2\pi t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{matrix} i & j & k & i & j \\ -8\pi \operatorname{Sen} 2\pi t & 8\pi \cos 2\pi t & 0 & -8\pi \operatorname{Sen} 2\pi t & 8\pi \cos 2\pi t \\ -16\pi^2 \cos 2\pi t & -16\pi^2 \operatorname{Sen} 2\pi t & 0 & -16\pi^2 \cos 2\pi t & -16\pi^2 \operatorname{Sen} 2\pi t \end{matrix}$$

$= 128\pi^3 \operatorname{Sen}^2 2\pi t\, k + 128\pi^3 \cos^2 2\pi t\, k = 128\pi^3 k$. Luego,

$\|r'(t) \times r''(t)\| = 128\pi^3$.

Por otra parte, $\|r'(t)\| = \sqrt{64\pi^2 \operatorname{Sen}^2 2\pi t + 64\pi^2 \cos^2 2\pi} = 8\pi$ y $\|r'(t)\|^3 = 512\pi^3$.

Por lo tanto, la curvatura K es

$$K = \frac{128\pi^3}{512\pi^3} = \frac{1}{4}.$$

• Hallar el vector unitario tangente y la componente tangencial de la aceleración para la curva $r(t) = e^t \cos t\, i + e^t \operatorname{Sen} t\, j$ en el instante $t = \pi/2$.

Desarrollo

$$r'(t) = e^t \cos t\, i - e^t \operatorname{Sen} t\, i + e^t \operatorname{Sen} t\, j + e^t \cos t\, j = (e^t \cos t - e^t \operatorname{Sen} t) i + (e^t \operatorname{Sen} t + e^t \cos t) j = v(t)$$

Entonces

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \operatorname{Sen} t)^2 + (e^t \operatorname{Sen} t + e^t \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t} \cos^2 t - \cancel{2 e^{2t} \operatorname{Sen} t \cos t} + e^{2t} \operatorname{Sen}^2 t + e^{2t} \operatorname{Sen}^2 t + \cancel{2 e^{2t} \operatorname{Sen} t \cos t} + e^{2t} \cos^2 t}$$

$$= \sqrt{e^{2t} + e^{2t}} = \sqrt{2}\, e^t.$$

Por otro lado,

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{(e^t \cos t - e^t \operatorname{Sen} t) i + (e^t \operatorname{Sen} t + e^t \cos t) j}{\sqrt{2}\, e^t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t - \operatorname{Sen} t) i + \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{Sen} t + \cos t) j.$$

Así que, $T(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(\frac{\pi}{2}) - \operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2})\right) i + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2})\right) j = \frac{\sqrt{2}}{2} (-i + j).$

Por otra parte,

$$a(t) = r''(t) = (\cancel{e^t \cos t} - e^t \operatorname{Sen} t - e^t \operatorname{Sen} t - \cancel{e^t \cos t}) i + (\cancel{e^t \operatorname{Sen} t} + e^t \cos t + e^t \cos t - \cancel{e^t \operatorname{Sen} t}) j$$

$$= -2 e^t \operatorname{Sen} t\, i + 2 e^t \cos t\, j.$$ En consecuencia

$$v(t) \cdot a(t) = -\cancel{2 e^{2t} \cos t \operatorname{Sen} t} + 2 e^{2t} \operatorname{Sen}^2 t + \cancel{2 e^{2t} \operatorname{Sen} t \cos t} + 2 e^{2t} \cos^2 t = 2 e^{2t}.$$

Por lo tanto,

$$a_T = \frac{2 e^{2t}}{\sqrt{2}\, e^t} = \sqrt{2}\, e^t \quad y \quad a_T(\pi/2) = \sqrt{2}\, e^{\pi/2}.$$