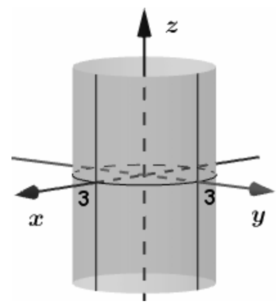
Solución primer parcial de cálculo 3 - 22/08/2018
Modelo B

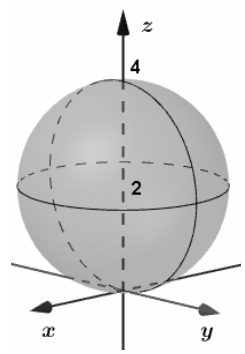
1. La superficie representada por cada ecuación es

a $x^2 + y^2 = 9 \rightarrow$ Cilindro circular recto de radio 3 $\rightarrow$

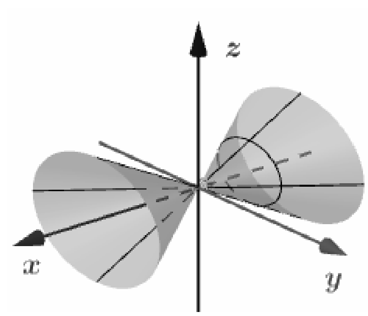


b $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

Esfera con centro en $(0, 0, 2)$ y radio 2 $\rightarrow$



c $x^2 = y^2 + z^2 \;\rightarrow$ Cono elíptico $\rightarrow$



Rúbrica
Identifica y dibuja adecuadamente la superficie representada por la ecuación: (0.4) cada una.

2a. Dado que $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{r}'(t)\,dt = \int 3t^2 dt\mathbf{i} + \int 6tdt\mathbf{j} + \int 6dt\mathbf{k} \\ &= \left(t^3 + C_1\right)\mathbf{i} + \left(3t^2 + C_2\right)\mathbf{j} + (6t + C_3)\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Haciendo $t = 0$ y usando la condición $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ se obtiene

$$\mathbf{r}(0) = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Igualando las componentes correspondientes de los vectores, se obtiene

$$C_1 = 1,\ C_2 = -2 \ \text{ y } \ C_3 = 1$$

Por tanto, la función buscada es $\mathbf{r}(t) = \left(t^3 + 1\right)\mathbf{i} + \left(3t^2 - 2\right)\mathbf{j} + (6t + 1)\,\mathbf{k}$.

2b. Dado que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}'(0) = 6\mathbf{k}$, una función vectorial de la recta tangente a la gráfica de la función $\mathbf{r}$ cuando $t = 0$ es

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(0) + t\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{t}(6\mathbf{k}) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + (1 + 6t)\,\mathbf{k}.$$

Rúbrica
Plantea y resuelve correctamente la integral indefinida de $\mathbf{r}'(t)$: (0.5)
Determina correctamente las constantes de integración y concluye para $\mathbf{r}(t)$: (0.4)
Halla $\mathbf{r}'(0)$ y lo interpreta como un vector director de la recta tangente: (0.3)
Halla la función vectorial para la recta tangente: (0.3) .

(**3**) Como $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3sent\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$, se tiene $\mathbf{r}'(t) = -3sent\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
Esto implica que

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-3sent)^2 + (3\cos t)^2 + (5)^2} = \sqrt{9(sen^2 t + \cos^2 t) + 25} = \sqrt{34}$$

Por tanto, la longitud de arco de la curva es

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{34}dt = 2\sqrt{34}\pi.$$

Rúbrica
Determina correctamente $\mathbf{r}'(t)$ y $\|\mathbf{r}'(t)\|$: (0.4)
Plantea y evalúa correctamente la integral que da la longitud de arco: (0.4) .

B

4a. Se tiene que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ y $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}$

Como $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{i} + 2t\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}(t) = 2\mathbf{k} \quad \text{y} \\ \|\mathbf{v}(t)\| &= \sqrt{(1)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{j}\ , \quad \|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| = 2 \quad \text{y} \quad k = \frac{2}{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3}.$$

4b. La componente normal de la aceleración está dada por $a_N = kv^2$, donde $v = \|\mathbf{v}(t)\|$
Por tanto,

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{2}{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3}\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^2 \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}. \end{aligned}$$

Rúbrica
Determina correctamente $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$: (0.5)
Determina correctamente $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$, $\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y la curvatura k : (0.8)
Determina correctamente a_N : (0.2) .