- Hallar una ecuación del plano tangente a la superficie $g(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1,-1,2)$.

Desarrollo.

Tomemos $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$

$F_x(x,y,z) = 2x$, $F_y(x,y,z) = 2y$ y $F_z(x,y,z) = -1$.

En el punto $(1,-1,2)$ las derivadas parciales son

$F_x(1,-1,2) = 2$, $F_y(1,-1,2) = -2$ y $F_z(1,-1,2) = -1$.

Por lo tanto, una ecuación del plano tangente es:

$$2(x-1) - 2(y+1) - (z-2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x \cancel{-2} - 2y - 2 - z \cancel{+2} = 0$$

$\Rightarrow 2x - 2y - z = 2$ es la ecuación del plano tangente buscado.

• Hallar el valor máximo de $f(x,y)=4xy$ donde $x>0$ e $y>0$, sujeto a la restricción $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

Desarrollo

Consideremos $g(x,y)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-1=0$.

$\nabla f(x,y)=4yi+4xj$ y $\nabla g(x,y)=\frac{2}{9}xi+\frac{1}{8}yj$. Luego,

$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y) \Rightarrow 4yi+4xj=\lambda\left(\frac{2}{9}xi+\frac{1}{8}yj\right)$. Entonces tenemos

$4y=\frac{2}{9}\lambda x$ (1)

$4x=\frac{1}{8}\lambda y$ (2)

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-1=0$ (3) (Restricción)

De (1) tenemos $\lambda=\frac{18y}{x}$. Sustituyendo en (2) tenemos

$4x=\frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right)y=\frac{9y^2}{4x} \Rightarrow 4x^2=\frac{9}{4}y^2 \Rightarrow x^2=\frac{9}{16}y^2$, sustituyendo en (3) tenemos

$\frac{\frac{9}{16}y^2}{9}+\frac{y^2}{16}-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}y^2+\frac{1}{16}y^2-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}y^2-1=0 \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$. Como se requiere $y>0$, entonces $y=2\sqrt{2}$. Por otra parte, de $x^2=\frac{9}{16}y^2$ se sigue

$x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$, pero se requiere $x>0$, así que $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

En consecuencia, el único punto crítico es $\left(\frac{3}{\sqrt{2}},2\sqrt{2}\right)$ y el valor máximo de f es $f\left(\frac{3}{\sqrt{2}},2\sqrt{2}\right)=24$.

- Determine si la función $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ -2 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ es continua en el punto $(0,0)$. En caso negativo y si la discontinuidad es removible, redefina f de tal forma que f sea continua en $(0,0)$.

Desarrollo.

Tenemos que $f(0,0)=-2$. Calculemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, para ello usaremos coordenadas polares.

Sean $x=r\cos\theta$ e $y=r\operatorname{Sen}\theta$. Cuando $(x,y)\to(0,0)$ tenemos que $r\to 0$. Luego:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta\, r^2\operatorname{Sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{Sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\operatorname{Sen}^2\theta\cos^2\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2\operatorname{Sen}^2\theta\cos^2\theta = 0 \neq f(0,0).$$

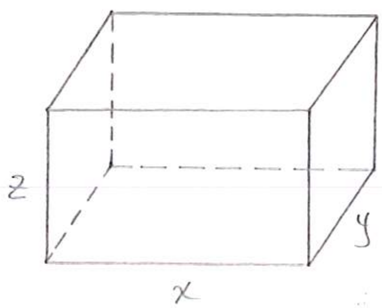
Por lo tanto, la función f es discontinua en $(0,0)$ y la discontinuidad es removible.

Redefiniendo la función f como

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

tenemos que f es continua en $(0,0)$.

• Determine las dimensiones relativas de una caja rectángular sin tapa que tiene un volumen específico, si se desea emplear la mínima cantidad de material en su elaboración.



El área de la superficie es $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ (1)

y el volumen es $V(x,y,z) = xyz$, $x,y,z \in (0,\infty)$ (2)

Despejando z en (2) y reemplazando en (1) tenemos

$$z = \frac{V}{xy} \quad y \quad S(x,y) = xy + 2x\frac{V}{xy} + 2y\frac{V}{xy}$$
$$= xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

Luego,

$S_x(x,y) = y - \frac{2V}{x^2}$ y $S_y(x,y) = x - \frac{2V}{y^2}$. Entonces

$$\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{yx^2 - 2V}{x^2} = 0 \\ \frac{xy^2 - 2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} yx^2 - 2V = 0 \quad (4) \\ xy^2 - 2V = 0 \Rightarrow x = \frac{2V}{y^2} \quad (3) \end{array}$$

Roemplazando (3) en (4) tenemos: $\frac{4V^2 y}{y^4} - 2V = 0 \Rightarrow \frac{4V^2}{y^3} - 2V = 0 \ldots$

$\ldots \Rightarrow 4V^2 - 2Vy^3 = 0 \Rightarrow 2V(2V - y^3) = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2V}$. Así que de (3) tenemos

$x = \frac{2V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \sqrt[3]{2V}$. Por lo tanto, el punto crítico es $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$.

$S_{xx}(x,y) = \frac{4xV}{x^4} = \frac{4V}{x^3}$; $S_{yy}(x,y) = \frac{4yV}{y^4} = \frac{4V}{y^3}$; $S_{xy}(x,y) = 1$.

$d = S_{xx} \cdot S_{yy} - (S_{xy})^2 = \frac{4V}{x^3} \cdot \frac{4V}{y^3} - 1 = \frac{16V^2}{x^3 y^3} - 1$. Luego,

$d(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = \frac{4V}{2V} \cdot \frac{4V}{2V} - 1 = 3 > 0$ y $S_{xx}(4/3, 4/3) = \frac{4V}{(4/3)^3} > 0$. Por lo tanto,

$(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ es un mínimo relativo.

En consecuencia, las dimensiones de la caja para emplear la mínima cantidad de material en su elaboración son

$$x = \sqrt[3]{2V}, \quad y = \sqrt[3]{2V}, \quad z = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$