# Solución segundo parcial de cálculo 3 - 24/09/2018
# Modelo A

**Punto 1**

Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= (4)(4u^3)+(-10y)[2(2u-v)2]\end{aligned}$$

Además, si $u=2$ y $v=1$, entonces $y=(3)^2=9$.
Por tanto,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{u=2,\ v=1}=(4)(32)+(-90)[4(3)]=-952.$$

**Rúbrica.**
Utiliza correctamente la regla de la cadena para plantear $\frac{\partial z}{\partial u}$ (0.2)
Encuentra correctamente las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial y}{\partial u}$ (0.6)
Evalúa correctamente $\frac{\partial z}{\partial u}$ en los valores de $u$ y $v$ indicados. (0.2)

**Punto 2**

(**a**) Como

$$\nabla F(x,y,z)=\left\langle \frac{2x}{z^2},\frac{-2y}{z^2},\frac{-2\left(x^2-y^2\right)}{z^3}\right\rangle$$

se tiene que

$$\nabla F(P)=\nabla F(2,4,-1)=\langle 4,-8,-24\rangle .$$

Además, un vector unitario en la dirección del vector $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{u}=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{6}}\langle 1,-2,1\rangle=\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle$$

Por tanto,

$$D_{\mathbf{u}}F(P)=\nabla F(P)\cdot\mathbf{u}=\langle 4,-8,-24\rangle\cdot\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle=\frac{-4}{\sqrt{6}}$$

(**b**) El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}F(P)$ es

$$|\nabla F(P)|=|\nabla F(2,4,-1)|=\sqrt{(4)^2+(-8)^2+(-24)^2}=\sqrt{656}=4\sqrt{41}$$

y se da cuando

$$\mathbf{u}=\frac{1}{|\nabla F\left(P\right)|}\nabla F\left(P\right)=\frac{1}{4\sqrt{41}}\left\langle 4,-8,-24\right\rangle =\left\langle \frac{1}{\sqrt{41}},\frac{-2}{\sqrt{41}},\frac{-6}{\sqrt{41}}\right\rangle .$$

(**c**) Sea $G\left(x,y,z\right)=x^2-y^2-3z^2$. Entonces $\nabla G\left(x,y,z\right)=\left\langle 2x,-2y,-6z\right\rangle$
Luego $\nabla G\left(6,2,3\right)=\left\langle 12,-4,-18\right\rangle$ y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $Q\left(6,2,3\right)$ es $12\left(x-6\right)-4\left(y-2\right)-18\left(z-3\right)=0\Leftrightarrow 6x-2y-9z=5$

**Rúbrica**

**a)** Halla correctamente $\nabla F\left(x,y,z\right)$ y lo evalúa en el punto indicado (0.3)
Halla correctamente la derivada direccional de $F$ en el punto y dirección que se dan (0.3)
**b**) Encuentra correctamente la derivada direccional máxima de $F$ en el punto indicado y la dirección en que se da (0.4)
**c**) Halla correctamente el gradiente de la función $G$ y lo evalúa en el punto indicado (0.2)
Encuentra una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto indicado (0.3)

**Punto 3**

Primero hallamos los **puntos críticos** de $f$. Para eso se tiene que

$$f_x\left(x,y\right)=12x^2-12 \quad \text{y} \quad f_y\left(x,y\right)=3y^2-3 \quad (\mathbf{I}).$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$12x^2-12=0 \;\text{ y }\; 3y^2-3=0.$$

se obtiene que $x=\pm1$ y $y=\pm1$.
Por tanto, los puntos críticos de $f$ son $(1,1)$, $\left(1,-1\right),\left(-1,1\right)$ y $\left(-1,-1\right)$.
Ahora utilizamos **la prueba de las segundas derivadas** parciales para determinar la **natu raleza** de estos puntos**.** Para eso, del resultado en $(\mathbf{I})$, se tiene que

$$f_{xx}\left(x,y\right)=24x,\quad f_{yy}\left(x,y\right)=6y,\quad f_{xy}\left(x,y\right)=0$$

Por tanto,

$$D\left(x,y\right)=\left(24x\right)\left(6y\right)-\left(0\right)^2=144xy.$$

Finalmente se concluye lo siguiente:
Dado que $D\left(1,1\right)=144>0$ y $f_{xx}\left(1,1\right)=24>0$, $f\left(1,1\right)=-10$ es un mínimo relativo
Dado que $D\left(1,-1\right)=D\left(-1,1\right)=-144<0$, $\left(1,-1\right)$ y $\left(-1,1\right)$ son puntos de silla
Dado que $D\left(-1,-1\right)=144>0$ y $f_{xx}\left(-1,-1\right)=-24<0$, $f\left(-1,-1\right)=10$ es un máximo relativo

**Rúbrica**

Determina correctamente los puntos críticos de $f$ (0.5)
Determina correctamente la función $D\left(x,y\right)$ (0.2)
Determina correctamente la naturaleza de los puntos críticos (0.3)
Encuentra los extremos relativos de $f$ (0.25)

**Punto 4**
Sea $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Se quiere hallar los valores extremos de $f(x,y,z) = x + 2y + z$ sujetos a la restricción $g(x,y,z) = 30$.
Para esto, hallamos los valores de $x, y, z$ y $\lambda$ tales $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ y $g(x,y,z) = 30$
La ecuación de gradientes da $\langle 1,2,1\rangle = \lambda \langle 2x, 2y, 2z\rangle$, de donde se tienen las ecuaciones
$1 = 2\lambda x$ $(\mathbf{1})$, $2 = 2\lambda y$ $(\mathbf{2})$, $1 = 2\lambda z$ $(\mathbf{3})$ y las restricciones $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.
Despejando $2\lambda$ en $(\mathbf{1})$ y $(\mathbf{2})$, por igualación se obtiene $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{y}$. Por tanto $y = 2x$
Despejando $2\lambda$ en $(\mathbf{1})$ y $(\mathbf{3})$, por igualación se obtiene $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{z}$. Por tanto $z = x$
De estos dos resultados y la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 30$, se tiene que
$x^2 + 4x^2 + x^2 = 30 \Longrightarrow 6x^2 = 30 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{5}$, $y = \pm 2\sqrt{5}$, $z = \pm\sqrt{5}$.
Así, los puntos que satisfacen la restricción y donde la función $f$ puede alcanzar un valor extremo son $\left(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$ y $\left(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$. Por tanto, los valores extremos de $f$ sujetos a la restricción dada son:
Máximo: $f\left(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} + 2\left(2\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
Mínimo: $f\left(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right) = -\sqrt{5} + 2\left(-2\sqrt{5}\right) + \left(-\sqrt{5}\right) = -6\sqrt{5}$

**Rúbrica**

Plantea correctamente la ecuación de gradientes (0.3)
Escribe correctamente el sistema de ecuaciones correspondiente a la ecuación de gradientes (0.15)
Determina bien los puntos que satisfacen la restricción y donde $f$ alcanza los extremos (0.5)
Encuentra los extremos de la función $f$ sujetos a la restricción (0.3)