Solución del examen final de Cálculo 3 - 201830.

A

I. (**15 puntos**) Encierre en un círculo la única respuesta correcta.

1. ¿Cuál de los siguientes campos vectoriales es conservativo?
   a) $\vec{F}(x,y) = x^2y\hat{\imath} + xy\hat{\jmath}$ **b)**$\vec{F}(x,y) = 2xy\hat{\imath} + (x^2 - y)\hat{\jmath}$ **c)** $\vec{F}(x,y) = x^3y^2\hat{\imath} + 3x^2y^3\hat{\jmath}$ **d) N.A.**
   Solución:
   $M = 2xy$, $N = (x^2 - y)$, entonces, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$, se concluye que el campo es conservativo.

2. Un potencial para el campo $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\hat{\imath} + (x^2+z^2)\hat{\jmath} + 2yz\hat{k}$, siendo c una constante es:
   a) $f(x,y,z) = x^3y^2 + y^2z + c$ **b)** $f(x,y,z) = xy + y^3z + c$ **c)** $f(x,y,z) = x^2y + yz^2 + c$ **d) N.A.**
   Solución:
   Si $f(x,y,z) = x^2y + yz^2 + c$ entonces $\vec{\nabla} f(x,y,z) = 2xy\hat{\imath} + (x^2+z^2)\hat{\jmath} + 2yz\hat{k} = \vec{F}(x,y,z)$.

3. Un potencial para el campo $\vec{F}(x,y) = y^2\hat{\imath} + (2xy - y)\hat{\jmath}$ es $f(x,y) = xy^2 - \frac{y^2}{2} + c$, c una constante. El trabajo $W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y)$, para desplazar un objeto desde el punto $(-1,4)$ hasta el punto $(1,2)$ es:
   a) 26 **b)** 0 **c)** - 6 **d) N.A.**
   Solución:
   Por ser un campo conservativo, se tiene que $W = f(1,2) - f(-1,4) = 26$.

4. El rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x^2z\hat{\imath} - 2xz\hat{\jmath} + yz\hat{k}$ es:
   a) $z\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + 8z\hat{k}$ **b)** $(z+2x)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} - 2z\hat{k}$ **c)** $2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ **d) N.A.**
   Solución:

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & -2xz & yz \end{vmatrix} = (z+2x)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} - 2z\hat{k}.$$

5. La divergencia del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \ln(x^2+y^2)\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + \ln(y^2+z^2)\hat{k}$ es:
   a) $\dfrac{3x+2z}{x^2+y^2}$ **b)** $\dfrac{z}{x^2+y^2} + \dfrac{x+2z}{y^2+z^2}$ **c)** $\dfrac{2x}{x^2+y^2} + x + \dfrac{2z}{y^2+z^2}$ **d) N.A.**
   Solución:
   La divergencia de $\vec{F}(x,y,z) = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + P\hat{k}$ es:

$$\text{div}\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2x}{x^2+y^2} + x + \frac{2z}{y^2+z^2}$$

II. (**15 puntos**) Utilice el **teorema de Green** para evaluar la siguiente integral:

$$\int_C \sin x \cos y dx + (xy + \cos x \sin y)dy$$

Donde C es la frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$.
Solución:
$M = \sin x \cos y$ y $N = (xy + \cos x \sin y)$. De donde $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = y - \sin x \sin y + \sin x \sin y = y$. Para hallar los limites de integración igualamos $x = \sqrt{x}$, de donde $x = 0$, $x = 1$. Aplicando el teorema de Green,

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

Se tiene que

$$\int_C \sin x \cos y dx + (xy + \cos x \sin y)dy = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{12}.$$

III. (**20 puntos**) Sea Q la región sólida limitada por los planos coordenados y el plano $2x+2y+z = 6$, y sea $\vec{F}(x, y, z) = 5x\hat{\imath} + 2y^2\hat{\jmath} + z\hat{k}$, usando el **teorema de la divergencia**, evalúe $\iint_S \vec{F} \bullet \vec{N} dS$, donde S es la superficie de Q.
Solución:

$$\text{div}\vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 6 + 4y$$

Entonces, por el teorema de la divergencia

$$\iint_S \vec{F} \bullet \vec{N} dS = \iiint_Q \text{div}\vec{F} dV$$

Se tiene:

$$\iint_S \vec{F} \bullet \vec{N} dS = \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (6 + 4y)dzdxdy = \int_0^3 \int_0^{3-y} (36 - 12x + 12y - 8xy - 8y^2)dxdy$$

$$= \int_0^3 (54 - 18y^2 + 4y^3)dy = 81.$$

Rúbrica - Cuestionario A.

Item I (15 puntos).

- 3 puntos por cada respuesta correcta

Item II (15 puntos).

- 5 puntos si halla las derivadas parciales
- 5 puntos si plantea bien las integrales
- 5 puntos si resuelve correctamente las integrales

Item III (20 puntos).

- 5 puntos si halla la divergencia
- 5 puntos si plantea bien las integrales
- 10 puntos si resuelve correctamente las integrales