Profesor: Jonathan Gonzalez Ospino

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo 3 201810
Fila A
Marzo 3 de 2018

Nombre completo:____________________________________Código:______________________________

1. **[10 pts]** Considere el punto $P(2,2,1)$ y la recta $\overleftrightarrow{l}$ determinada por la ecuación

$$\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = z.$$

Halle la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta $\overleftrightarrow{l}$.

2. **[20 pts]** Dada la función vectorial $r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$r(t) := \sin t\ \hat{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t\ \hat{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t\ \hat{k}.$$

a) [10 pts] Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva representada por r en el punto $(1,0,0)$.
b) [10 pts] Calcule la longitud de arco de la curva representada por $r(t)$.

3. **[20 pts]** Considere la ecuación

$$y = x^2 - 1.$$

a) [5 pts] Parametrice la parábola dada por la anterior ecuación en la forma

$$r(t) := x(t)\ \hat{\imath} + y(t)\ \hat{\jmath} + z(t)\ \hat{k}.$$

b) [10 pts] Calcule la curvatura de la parábola en todo punto. Use la fórmula

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

c) [5 pts] ¿En qué punto la parábola presenta curvatura máxima?

Tiempo máximo: 50 minutos.

IMPORTANTE: Durante la realización del examen está prohibido el uso de calculadoras, celulares, relojes digitales y dispositivos electrónicos en general. El incumplimiento de esta norma será causal de anulación de la prueba.

Solucionario Parcial I - Cálculo 3 - 201810

fila A.

$P(2,2,1)$

① $\overleftrightarrow{l}: \begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}$

Un punto de $\overleftrightarrow{l}$ es $Q(2,3,1)$.

$\overrightarrow{PQ} = (0,1,0)$

La dirección de la recta es $\vec{v} = (2,-1,1)$.

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} - 0\hat{j} - 2\hat{k}$$

La ecuación del plano está dado por

$$1(x-2) + 0(y-2) - 2(z-1) = 0.$$

$$x - 2 - 2z + 2 = 0$$

$$x = 2z.$$

②

a) $r'(t) = \cos t\,\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\,\hat{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.

$P(1,0,0) \longleftrightarrow r(\pi/2)$

$r'(\pi/2) = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Las ecuaciones simétricas de la recta tangente son

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$$

b) $L = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\|\, dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t}\; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

③ $y = x^2 - 1$

a) Si $x = t$, entonces $y = t^2 - 1$.

$$r(t) = t\hat{i} + (t^2-1)\hat{j} + 0\hat{k}$$

b) $r'(t) = \hat{i} + 2t\hat{j} + 0\hat{k}$

$r''(t) = 0\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k} = 2\hat{k}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

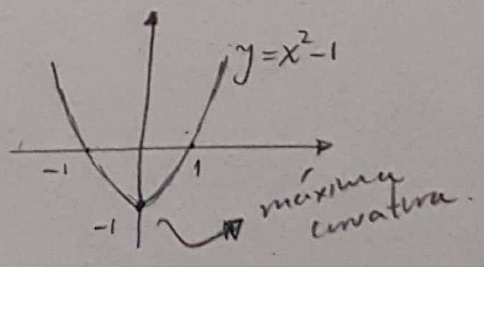
c) $k'(t) = \dfrac{-3}{(1+4t^2)^{5/2}} \cdot 8t$

$$= \frac{-24t}{(1+4t^2)^{5/2}}$$

$+$	0	$-$	$k'(t)$
$\nearrow$		$\searrow$	

k tiene un máximo en $t = 0$.

$\Rightarrow$ la curvatura de la parábola es máxima en el punto $(0,-1)$.



Scanned by CamScanner

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo 3 201810
Fila B
Marzo 3 de 2018

Nombre completo:____________________Código:____________________

1. [**10 pts**] Considere el punto $P(1,2,2)$ y la recta $\overleftrightarrow{l}$ determinada por la ecuación

$$x = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Halle la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta $\overleftrightarrow{l}$.

2. [**20 pts**] Dada la función vectorial $r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$r(t) := \cos t\ \hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t\ \hat{\jmath} + \frac{1}{2} \sin t\ \hat{k}.$$

a) [10 pts] Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva representada por r en el punto $(1, 0, 0)$.
b) [10 pts] Calcule la longitud de arco de la curva representada por $r(t)$.

3. [**20 pts**] Considere la ecuación

$$y = 1 - x^2.$$

a) [5 pts] Parametrice la parábola dada por la anterior ecuación en la forma

$$r(t) := x(t)\ \hat{\imath} + y(t)\ \hat{\jmath} + z(t)\ \hat{k}.$$

b) [10 pts] Calcule la curvatura de la parábola en todo punto. Use la fórmula

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

c) [5 pts] ¿En qué punto la parábola presenta curvatura máxima?

Tiempo máximo: 50 minutos.

IMPORTANTE: Durante la realización del examen está prohibido el uso de calculadoras, celulares, relojes digitales y dispositivos electrónicos en general. El incumplimiento de esta norma será causal de anulación de la prueba.

Solucionario Parcial I - Cálculo 3 - 201810

fila B.

$P(1,2,2)$

① $\overleftrightarrow{l}: \begin{cases} x = t \\ y = 4-t \\ z = 2t \end{cases}$

Un punto de $\overleftrightarrow{l}$ es $Q(1,3,2)$.

$\overrightarrow{PQ} = (0,1,0)$

la dirección de la recta es $\vec{v} = (1,-1,2)$.

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\hat{\imath} - 0\hat{\jmath} - \hat{k}$$

la ecuación del plano está dada por

$$2(x-1) + 0(y-2) - 1(z-2) = 0.$$

$$2x - 2 - z + 2 = 0$$

$$2x = z$$

②

a) $r'(t) = -\operatorname{sen} t\,\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\,\hat{\jmath} + \frac{1}{2}\cos t\,\hat{k}$

$P(1,0,0) \longleftrightarrow r(0)$.

$r'(0) = (0, \sqrt{3}/2, 1/2)$.

las ecuaciones simétricas de la recta tangente son

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

b) $L = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\|\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \frac{3}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t}\,dt.$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

③ $y = 1 - x^2$.

a) si $x = t$, entonces $y = 1 - t^2$.

$r(t) = t\,\hat{\imath} + (1-t^2)\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$

b) $r'(t) = \hat{\imath} - 2t\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$

$r''(t) = 0\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$

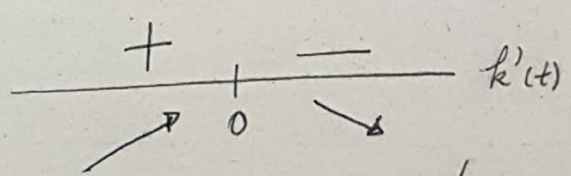
$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -2t & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\hat{\imath} - 0\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

c) $k'(t) = \frac{-3}{(1+4t^2)^{5/2}} \cdot 8t$

$$= \frac{-24t}{(1+4t^2)^{5/2}}$$



k tiene un máximo en $t=0$.

$\Rightarrow$ la curvatura de la parábola es máxima en el punto $(0,1)$.