Solución segundo parcial de cálculo 3 - 24/09/2018
Modelo B

Punto 1

Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= (5)(-24v^2) + (-8y)[2(2u-v)(-1)]\end{aligned}$$

Además, si $u = 2$ y $v = 1$, entonces $y = (3)^2 = 9$.
Por tanto,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{u=2,\ v=1} = (5)(-24) + (-72)[-2(3)] = 312.$$

Rúbrica.
Utiliza correctamente la regla de la cadena para plantear $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ (0.2)
Encuentra correctamente las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ (0.6)
Evalúa correctamente $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ en los valores de u y v indicados. (0.2)

Punto 2

(**a**) Como

$$\nabla F(x,y,z) = \left\langle \frac{-2x}{z^2}, \frac{2y}{z^2}, \frac{-2\left(y^2 - x^2\right)}{z^3} \right\rangle$$

se tiene que

$$\nabla F(P) = \nabla F(2,4,-1) = \langle -4, 8, 24 \rangle.$$

Además, un vector unitario en la dirección del vector $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 2,-1,1\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

Por tanto,

$$D_{\mathbf{u}}F(P) = \nabla F(P)\cdot\mathbf{u} = \langle -4,8,24\rangle \cdot \left\langle \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle = \frac{8}{\sqrt{6}}$$

(**b**) El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}F(P)$ es

$$|\nabla F(P)| = |\nabla F(2,4,-1)| = \sqrt{(-4)^2 + (8)^2 + (24)^2} = \sqrt{656} = 4\sqrt{41}$$

y se da cuando

$$\mathbf{u}=\frac{1}{|\nabla F(P)|}\nabla F(P)=\frac{1}{4\sqrt{41}}\langle -4,8,24\rangle=\left\langle \frac{-1}{\sqrt{41}},\frac{2}{\sqrt{41}},\frac{6}{\sqrt{41}}\right\rangle .$$

(**c**) Sea $G(x,y,z)=-3x^2-y^2+z^2$. Entonces $\nabla G(x,y,z)=\langle -6x,-2y,2z\rangle$
Luego $\nabla G(3,2,6)=\langle -18,-4,12\rangle$ y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $Q(3,2,6)$ es $-18(x-3)-4(y-2)+12(z-6)=0 \Leftrightarrow -9x-2y+6z=5$

Rúbrica

a) Halla correctamente $\nabla F(x,y,z)$ y lo evalúa en el punto indicado (0.3)
Halla correctamente la derivada direccional de F en el punto y dirección que se dan (0.3)
b) Encuentra correctamente la derivada direccional máxima de F en el punto indicado y la dirección en que esta se da (0.4)
c) Halla correctamente el gradiente de la función g y lo evalúa en el punto indicado (0.2)
Encuentra una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto indicado (0.3)

Punto 3

Primero hallamos los **puntos críticos** de f. Para eso se tiene que

$$f_x(x,y)=-12x^2+12 \quad \text{y} \quad f_y(x,y)=-3y^2+3 \quad (\mathbf{I}).$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$-12x^2+12=0 \ \text{ y } \ -3y^2+3=0.$$

se obtiene que $x=\pm 1$ y $y=\pm 1$.
Por tanto, los puntos críticos de f son $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$.
Ahora utilizamos **la prueba de las segundas derivadas** parciales para determinar la **natu raleza** de estos puntos. Para eso, del resultado en $(\mathbf{I})$, se tiene que

$$f_{xx}(x,y)=-24x, \quad f_{yy}(x,y)=-6y, \quad f_{xy}(x,y)=0$$

Por tanto,

$$D(x,y)=(-24x)(-6y)-(0)^2=144xy.$$

Finalmente se concluye lo siguiente:
Dado que $D(1,1)=144>0$ y $f_{xx}(1,1)=-24<0$, $f(1,1)=15$ es un máximo relativo
Dado que $D(1,-1)=D(-1,1)=-144<0$, $(1,-1)$ y $(-1,1)$ son puntos de silla
Dado que $D(-1,-1)=144>0$ y $f_{xx}(-1,-1)=24>0$, $f(-1,-1)=-5$ es un un mínimo relativo

Rúbrica

Determina correctamente los puntos críticos de f (0.5)
Determina correctamente la función $D(x,y)$ (0.2)
Determina correctamente la naturaleza de los puntos críticos (0.3)
Encuentra los extremos relativos de f (0.25)

Punto 4

Sea $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Se quiere hallar los valores extremos de $f(x,y,z) = 2x + y + z$ sujetos a la restricción $g(x,y,z) = 60$.

Para esto, hallamos los valores de x, y, z y λ tales $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ y $g(x,y,z) = 60$

La ecuación de gradientes da $\langle 2,1,1\rangle = \lambda \langle 2x, 2y, 2z\rangle$, de donde se tienen las ecuaciones

$2 = 2\lambda x$ $(\mathbf{1})$, $1 = 2\lambda y$ $(\mathbf{2})$, $1 = 2\lambda z$ $(\mathbf{3})$ y las restricciones $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$.

Despejando 2λ en $(\mathbf{1})$ y $(\mathbf{2})$, por igualación se obtiene $\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{y}$. Por tanto $x = 2y$

Despejando 2λ en $(\mathbf{2})$ y $(\mathbf{3})$, por igualación se obtiene $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$. Por tanto $z = y$

De estos dos resultados y la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 60$, se tiene que

$4y^2 + y^2 + y^2 = 60 \Longrightarrow 6y^2 = 60 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{10},\ x = \pm 2\sqrt{10},\ z = \pm\sqrt{10}$.

Así, los puntos que satisfacen la restricción y donde la función f puede alcanzar un valor extremo son $\left(2\sqrt{10}, \sqrt{10}, \sqrt{10}\right)$ y $\left(-2\sqrt{10}, -\sqrt{10}, -\sqrt{10}\right)$. Por tanto, los valores extremos de f sujetos a la restricción dada son:

Máximo: $f\left(2\sqrt{10}, \sqrt{10}, \sqrt{10}\right) = 2\left(2\sqrt{10}\right) + \sqrt{10} + \sqrt{10} = 6\sqrt{10}$

Mínimo: $f\left(-2\sqrt{10}, -\sqrt{10}, -\sqrt{10}\right) = 2\left(-2\sqrt{10}\right) - \sqrt{10} - \sqrt{10} = -6\sqrt{10}$

Rúbrica

Plantea correctamente la ecuación de gradientes (0.3)

Escribe correctamente el sistema de ecuaciones correspondiente a la ecuación de gradientes (0.15)

Determina bien los puntos que satisfacen la restricción y donde f alcanza los extremos (0.5)

Encuentra los extremos de la función f sujetos a la restricción (0.3)