Rúbrica

Tercer parcial de cálculo 3
Fecha: 22/10/2018
Modelo A

Punto 1
Plantea bien la integral que da la masa (**1.2**)
Evalúa bien la integral que da la masa (**1.0**)
Plantea bien la integral que da el momento respecto al eje x (**1.2**)
Evalúa bien la integral que da el momento respecto al eje x (**1.0**)
Determina bién la coordenada $\overline{y}$ del centro de masa (**0.6**)

Punto 2
Formula bien la integral que da el área de la superficie en coordenadas rectangulares **(2.0)**
Cambia correctamente la integral a coordenadas polares **(1.5)**
Evalúa bien la integral **(1.5)**

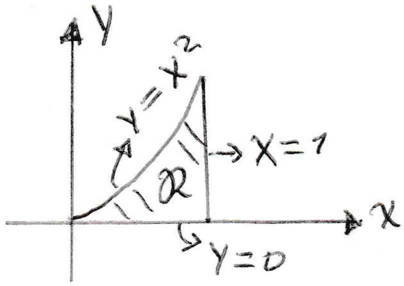
Punto 3
Determina bien los límites de integración en x, y, z **(1.5)**
Plantea bien la integral triple **(1.5)**
Evalúa bien la integral triple **(2.0)**

Punto 4
Determina bien los límies de integración en coordenadas esféricas **(1.5)**
Plantea bien la integral que da el volumen del sólido en coordenadas esféricas **(1.5)**
Evalúa correctamente la integral **(2.0)**

Solución tercer parcial de cálculo 3

Fecha: 22/10/2018 – A

Punto 1



$\mathcal{R} \to$ Lámina

Masa.

$$M = \iint_{\mathcal{R}} \rho(x,y)\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^2} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{xy^2}{2}\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^5}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^6}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Momento respecto al eje x

$$M_x = \iint_{\mathcal{R}} y\,\rho(x,y)\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^2} y(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{xy^3}{3}\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^7}{3}\,dx$$

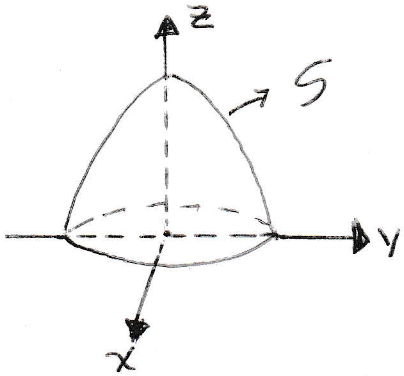
$$= \frac{x^8}{24}\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Por tanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2}.$$

A

Punto 2

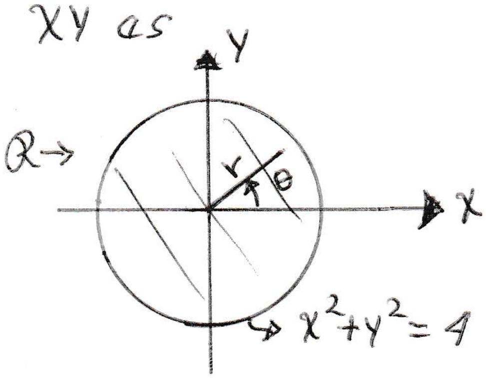


$S \to$ Superficie $z = 4 - x^2 - y^2$

Haciendo $z = 0$ se tiene

$0 = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Entonces la proyección $\mathcal{R}$ de S sobre el plano XY es



Así, el área de S es

$$A(S) = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\, dA.$$

Cambiando a coordenadas polares se tiene

$$\mathcal{R} \to \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 2$$

Por tanto,

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \sqrt{1 + 4r^2}\; r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} (17)^{3/2} - 1\; d\theta$$

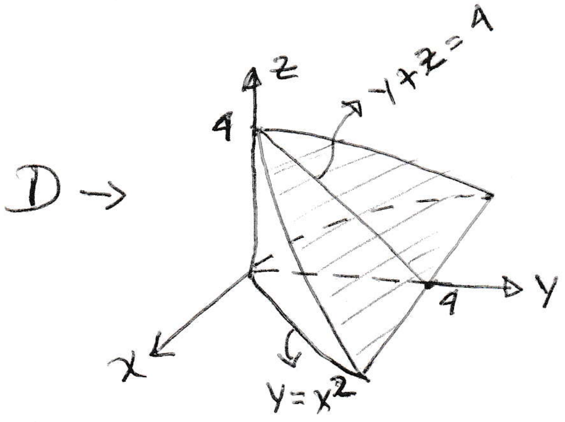
$$= \frac{1}{12}\left[(17)^{3/2} - 1\right] \cdot 2\pi$$

$$= \frac{(17)^{3/2} - 1}{6} \cdot \pi$$

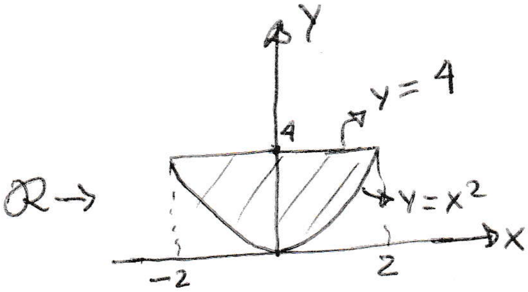
$$\approx 36.18$$

A

Punto 3



Proyección de D en el plano xy.



Límites de integración

Para x, y.

$-2 \le x \le 2 \quad , \quad x^2 \le y \le 4$

Para z.

Del plano $y+z=4$

se tiene $z = 4-y$.

Entonces, $0 \le z \le 4-y$

Evaluación de la integral.

$$\iiint_D x^2 dV = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} x^2\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x^2 z \Big|_0^{4-y} dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x^2(4-y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} x^2\left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} x^2(16-8) - x^2\left(4x^2 - \frac{x^4}{2}\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 8x^2 - 4x^4 + \frac{x^6}{2}\, dx$$

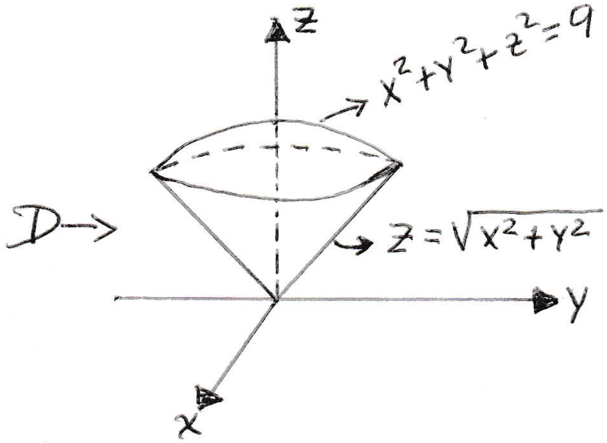
$$= \frac{8x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + \frac{x^7}{14}\Big|_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{8(2)^3}{3} - \frac{4(2)^5}{5} + \frac{(2)^7}{14}\right] - \left[\frac{8(-2)^3}{3} - \frac{4(-2)^5}{5} + \frac{(-2)^7}{14}\right]$$

$$= \frac{1024}{105} \approx 9.75.$$

Punto 4

A



Cambiando a coordanadas esféricas, para la esfara sa tiena

$x^2+y^2+z^2=9 \Rightarrow \rho^2=9 \Rightarrow \rho=3$,

y para al semicono sa tiene

$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\phi}$

$\Rightarrow \rho\cos\phi = \rho\operatorname{sen}\phi$

$\Rightarrow \rho=0 \quad o \quad \tan\phi=1$

$\Rightarrow \rho=0 \quad o \quad \phi=\pi/4$.

Por tanto, los límites de integración en ρ, ϕ y θ son $0\le\rho\le 3$, $0\le\phi\le\frac{\pi}{4}$, $0\le\theta\le 2\pi$.

Entonces al volumen dal sólido as

$$V=\iiint_D dV$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3}\rho^2\operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\phi\Big|_0^3 d\phi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 9\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=9\int_0^{2\pi}-\cos\phi\Big|_0^{\pi/4} d\theta$$

$$=9\int_0^{2\pi}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\, d\theta$$

$$=9\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 2\pi$$

$$=18\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\pi$$

$$\approx 16.57$$