Rúbrica

Tercer parcial de cálculo 3
Fecha: 22/10/2018
Modelo B

Punto 1
Plantea bien la integral que da la masa (**1.2**)
Evalúa bien la integral que da la masa (**1.0**)
Plantea bien la integral que da el momento respecto al eje y (**1.2**)
Evalúa bien la integral que da el momento respecto al eje y (**1.0**)
Determina bién la coordenada $\overline{x}$ del centro de masa (**0.6**)

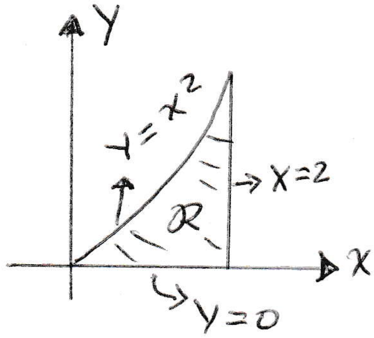
Punto 2
Formula bien la integral que da el área de la superficie en coordenadas rectangulares **(2.0)**
Cambia correctamente la integral a coordenadas polares **(1.5)**
Evalúa bien la integral **(1.5)**

Punto 3
Determina bien los límites de integración en x, y, z **(1.5)**
Plantea bien la integral triple **(1.5)**
Evalúa bien la integral triple **(2.0)**

Punto 4
Determina bien los límies de integración en coordenadas esféricas **(1.5)**
Plantea bien la integral que da el volumen del sólido en coordenadas esféricas **(1.5)**
Evalúa correctamente la integral **(2.0)**

Solución tercer Parcial de Cálculo 3
Fecha: 22/10/2018 — B.

Punto 1.



$R \rightarrow$ Lámina

Masa.

$$M = \iint_R \rho(x,y)\,dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{x^2} x\,y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x\,y^2}{2}\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^5}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^6}{12}\Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Momento respecto al eje Y

$$M_y = \iint_R x\,\rho(x,y)\,dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{x^2} x(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2 y^2}{2}\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^6}{2}\,dx$$

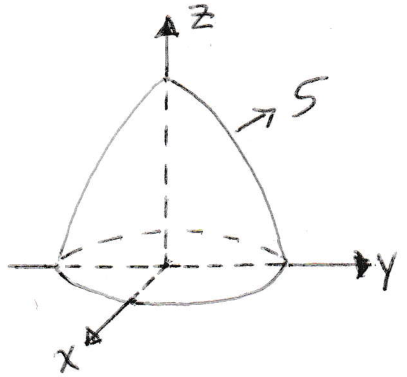
$$= \frac{x^7}{14}\Big|_0^2 = \frac{64}{7}$$

Entonces

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{64}{7}}{\frac{16}{3}} = \frac{12}{7}$$

B

Punto 2

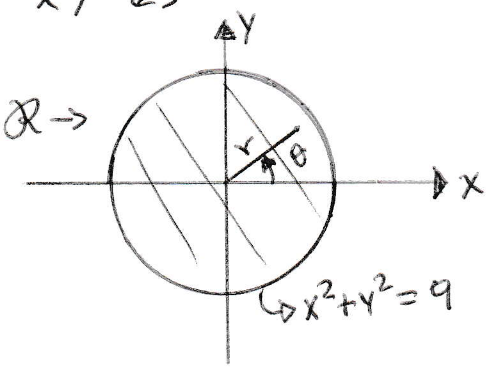


$S \rightarrow$ superficie $z = 9 - x^2 - y^2$

Haciendo $z = 0$ se tiene

$0 = 9 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

Entonces la proyección $\mathcal{R}$ de S sobre el plano xy es



Así, el área de S es

$$A(S) = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\, dA.$$

Cambiando a coordanas polares se tiene

$\mathcal{R} \rightarrow 0 \le \theta \le 2\pi,$

$0 \le r \le 3.$

Por tanto,

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^3\, d\theta$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} (37)^{3/2} - 1\, d\theta$$

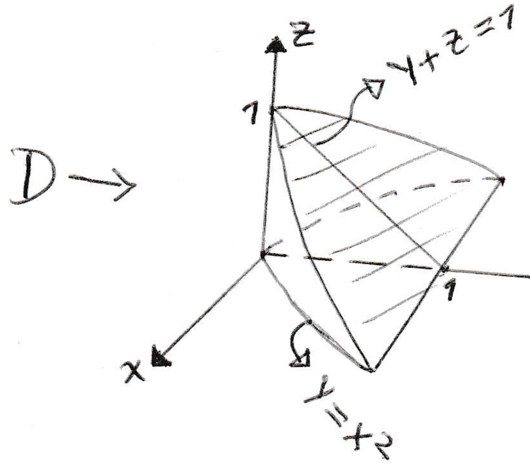
$$= \frac{1}{12}\left[(37)^{3/2} - 1\right]\cdot 2\pi$$

$$= \frac{(37)^{3/2} - 1}{6}\cdot \pi$$

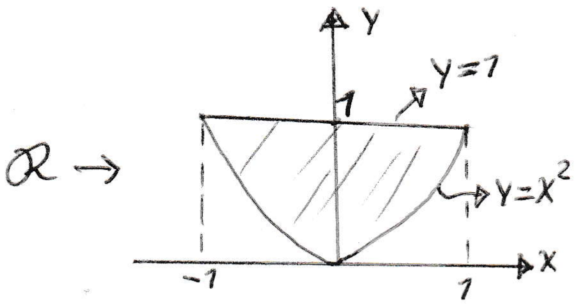
$$\approx 117.32$$

B

Punto 3



Proyección de D en al plano xy



Límites de integración

Para x, y.

$-1 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq 1$

Para z.

Del plano $y+z=1$

se tiene $z=1-y$

Entoncas, $0 \leq z \leq 1-y$.

Evaluación de la integral.

$$\iiint_D x^2 dv = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} x^2 dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x^2 z \Big|_0^{1-y} dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x^2(1-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{1} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2\left(1-\frac{1}{2}\right) - x^2\left(x^2-\frac{x^4}{2}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} - x^4 + \frac{x^6}{2}\,dx$$

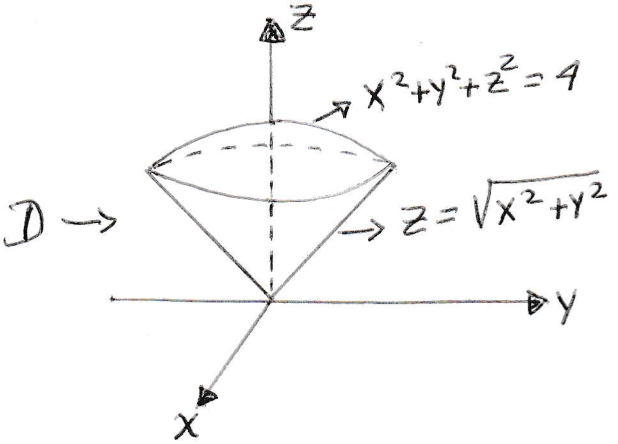
$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{14}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{14}\right) - \left(\frac{-1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{14}\right)$$

$$= \frac{8}{105} \approx 0.76.$$

Punto 4

B



Cambiando a coordenadas esféricas, para la esfera se tiene

$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \rho^2=4 \Rightarrow \rho=2,$

y para el semicono se tiene

$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi}$

$\Rightarrow \rho\cos\phi = \rho\operatorname{sen}\phi$

$\Rightarrow \rho = 0 \quad o \quad \tan\phi = 1$

$\Rightarrow \rho = 0 \quad o \quad \phi = \pi/4$

Por tanto, los límites de integración en ρ, ϕ y θ son $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \phi \le \pi/4$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Entonces el volumen del sólido es

$$V = \iiint_D dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\phi \Big|_0^2 \, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{8}{3}\operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} -\cos\phi \Big|_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 2\pi$$

$$\approx 4.9$$