(A) Primer parcial de Cálculo 3. 201730

(1) (24 puntos): $\vec{r}(t) = \left(2(\text{sen}t - t\cos t), 2(\cos t + t\,\text{sen}t), \frac{3}{2}t^2\right)$, $0 \leq t \leq 4\pi$

a) $\vec{r}\,'(t) = (2t\,\text{sen}t, 2t\cos t, 3t)$

$\vec{r}\,'(2\pi) = (0, 4\pi, 6\pi) \rightarrow$ vector de dirección de la recta tangente.

$\vec{r}(2\pi) = (-4\pi, 2, 6\pi^2) \rightarrow$ punto sobre el plano pedido.

$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{13}\,t$

$T(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2\,\text{sen}t, 2\cos t, 3)$

$T'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2\cos t, -2\,\text{sen}t, 0)$

$T'(2\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2, 0, 0) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, 0, 0\right) \rightarrow$ vector normal al plano.

Ecuación del plano: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{2}{\sqrt{13}}(x+4\pi) = 0 \Rightarrow 2x + 8\pi = 0 \Rightarrow x = -4\pi$

Es un plano paralelo al plano yz.

---

b) $K = \dfrac{\|T'(2\pi)\|}{\|\vec{r}\,'(2\pi)\|}$, $\|\vec{T}\,'(2\pi)\| = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\|\vec{r}\,'(2\pi)\| = 2\sqrt{13}\,\pi$.

$\Rightarrow K = \dfrac{1}{13\pi} = 0.02448..$

---

c) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{13}\,t\,dt = \frac{\sqrt{13}}{2}t^2\Big|_0^{4\pi} = 8\sqrt{13}\,\pi^2$

$\cong 285$

① Rúbrica (puntos)

a) Calcula $\vec{r}''(2\pi)$: 2
calcula $\vec{r}'(2\pi)$: 2
calcula $\vec{T}'(2\pi)$: 2
Ecuación del plano: 2

b) $\|\vec{r}'(2\pi)\|$: 2
$\|T'(2\pi)\|$: 2
K: 4

c) Escribe la Integral: 4
Resuelve correctamente la Integral: 4

② $\rho^2(1-\cos^2\phi)=16 \Rightarrow \rho^2-\rho^2\cos^2\phi=16.$
Se sabe que $\rho^2=x^2+y^2+z^2$ y $z=\rho\cos\phi \Rightarrow$
$x^2+y^2+z^2-z^2=16 \Rightarrow x^2+y^2=16$ Esto es un cilindro circular recto, eje en el eje Z y radio 4.

② Rúbrica. Escribe las equivalencias entre las coordenadas rectangulares y las esféricas: 5.
Encuentra la ecuación en coordenadas rectangulares: 5

③ $\vec{v}(t)=\int a(t)\,dt=(-\operatorname{sen}t+c_1,-\cos t+c_2,c_3)=(-\operatorname{sen}t,-\cos t,0)+\vec{C}$
$\vec{v}(0)=(c_1,-1+c_2,c_3)=(0,-1,1)\Rightarrow c_1=0, c_2=0, c_3=1$
$\Rightarrow \vec{v}(t)=(-\operatorname{sen}t,-\cos t,1).$ $\vec{r}(t)=\int\vec{v}(t)\,dt=(\cos t+c_1,-\operatorname{sen}t+c_2,t+c_3).$ $\vec{r}(0)=(1+c_1,c_2,c_3)=(2,0,0)\Rightarrow$
$c_1=1,\ c_2=0,\ c_3=0 \Rightarrow \vec{r}(t)=(\cos t+1,-\operatorname{sen}t,t).$

③ Rúbrica. Calcula $\vec{v}(t)$: 8
calcula $\vec{r}(t)$: 8