Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Solución Examen parcial 1 - Cálculo 3 - 2018-30

A

(I) Indique si la proposición dada es falsa o verdadera.

(1) (**F**) La intersección del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ con el plano xy es una circunferencia

(2) (**F**) La ecuación $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ corresponde a una esfera

(3) (**F**) La ecuación $y = x^2$ representa en el espacio una parábola

(4) (**V**) Toda esfera es un elipsoide

(5) (**V**) El centro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ es $(0, 0, 1)$

(6) (**V**) El radio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ es 1

(7) (**V**) El vector tangente a la curva $r(t) = (\cos t, \sin t)$ en $t = 0$ es $\hat{\jmath}$

(8) (**F**) La curvatura de una recta depende de su pendiente

(9) (**V**) La curvatura de una circunferencia es inversamente proporcional a su radio

(10) (**V**) La curva $y^2 = x^3$ no es suave en (0,0)

(II) Suponga que una partícula se mueve según la función de posición dada por

$$r(t) = t^2\hat{\imath} + (t^3 - 3t)\hat{\jmath} + (t^2 - 5t)\hat{k}.$$

Indique en cada caso la respuesta correcta.

(1) La partícula pasa por el plano xy en el instante t igual a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

(2) La velocidad de la partícula en $t = 0$ es el vector

a) $(0, 0, 0)$

b) $(0, 3, 5)$

c) $(0, -3, 5)$

d) $(0, -3, -5)$

e) $(1, 3, 5)$

(3) La aceleración de la partícula en $t = 0$ es el vector

a) $(0, 0, 0)$

b) $(2, 0, 2)$

c) $(-2, 0, 2)$

d) $(2, 0, -2)$

e) $(-2, 0, -2)$

(III) Suponga que una partícula se mueve según la función de posición dada por

$$r(t) = 2\cos t\ \hat{\imath} + 2\sin t\ \hat{\jmath} + t\hat{k}.$$

Indique en cada caso la respuesta correcta.

(1) El vector tangente unitario en $t = \pi$ es

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1)$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, -1)$

d) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1)$

e) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, \pi)$

(2) El vector normal unitario en $t = \pi$ es

a) $(0, 0, 0)$

b) $\hat{\imath}$

c) $-\hat{\imath}$

d) $\hat{k}$

e) $-\hat{k}$

(3) La curvatura en $t = \pi$ es

a) $2/5$

b) $5/2$

c) 1

d) 2

e) Ninguna anterior

(IV) Hallar la función longitud de arco para el segmento de recta dado por

$$r(t) = (3 - 3t)\ \hat{\imath} + 4t\hat{\jmath} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

y exprese r como función del parámetro s.

`Solución.` La función longitud de arco está dada por

$$s(t) = \int_0^t \|r'(u)\| du = \int_0^t 5\ du = 5t.$$

Por lo tanto $t = s/5$ y se tiene que

$$r(s) = (3 - 3s/5)\ \hat{\imath} + 4s/5\hat{\jmath} \quad 0 \leq s \leq 5.$$

Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Solución Examen parcial 1 - Cálculo 3 - 2018-30
B

(I) (10 Puntos) Indique si la proposición dada es falsa o verdadera.

(1) (**V**) La intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano xy es una circunferencia
(2) (**F**) La ecuación $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ corresponde a una esfera
(3) (**F**) La ecuación $y = x^2$ representa en el espacio una parábola
(4) (**F**) Todo elipsoide es una esfera
(5) (**F**) El centro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ es $(0, 0, 2)$
(6) (**F**) El radio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ es 2
(7) (**F**) El vector tangente a la curva $r(t) = (\cos t, \sin t)$ en $t = \pi$ es $-\hat{\imath}$
(8) (**V**) La curvatura de una recta es cero
(9) (**F**) La curvatura de una circunferencia es directamente proporcional a su radio
(10) (**F**) La curva $y^2 = x^3$ es suave en (0,0)

(II) (15 Puntos) Suponga que una partícula se mueve según la función de posición dada por

$$r(t) = 2\cos t\ \hat{\imath} + 2\sin t\ \hat{\jmath} + t\hat{k}.$$

Indique en cada caso la respuesta correcta.

(1) El vector tangente unitario en $t = \pi$ es

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1)$
b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$
c) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, -1)$
d) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1)$
e) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, \pi)$

(2) El vector normal unitario en $t = \pi$ es

a) $(0, 0, 0)$
b) $\hat{\imath}$
c) $-\hat{\imath}$
d) $\hat{k}$
e) $-\hat{k}$

(3) La curvatura en $t = \pi$ es

a) $2/5$
b) $5/2$

c) 1

d) 2

e) Ninguna anterior

(III) (15 Puntos) Suponga que una partícula se mueve según la función de posición dada por

$$r(t) = t^2\hat{\imath} + (t^3 - 3t)\hat{\jmath} + (t^2 - 5t)\hat{k}.$$

Indique en cada caso la respuesta correcta.

(1) La partícula pasa por el plano yz en el instante t igual a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 0

(2) La velocidad de la partícula en $t = 0$ es el vector

a) $(0, 0, 0)$

b) $(0, 3, 5)$

c) $(0, -3, 5)$

d) $(0, -3, -5)$

e) $(1, 3, 5)$

(3) La aceleración de la partícula en $t = 0$ es el vector

a) $(0, 0, 0)$

b) $(2, 0, 2)$

c) $(-2, 0, 2)$

d) $(2, 0, -2)$

e) $(-2, 0, -2)$

(IV) (10 Puntos) Hallar la función longitud de arco para el segmento de recta dado por

$$r(t) = (1 - 3t)\ \hat{\imath} + 4t\hat{\jmath} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

y exprese r como función del parámetro s.

Solución. La función longitud de arco está dada por

$$s(t) = \int_0^t \|r'(u)\| du = \int_0^t 5\ du = 5t.$$

Por lo tanto $t = s/5$ y se tiene que

$$r(s) = (1 - 3s/5)\ \hat{\imath} + 4s/5\hat{\jmath} \quad 0 \leq s \leq 5.$$