Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Solución Examen parcial 2 - Cálculo 3 - 2018-30

A

(I) Indique si la proposición dada es falsa o verdadera.

(1) (**V**) La función $f(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$ tiene dominio $\mathbb{R}^2$

(2) (**V**) 0 pertenece al rango o imagen de $f(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$

(3) (**V**) La función $f(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$ es continua en $(0,0)$

(4) (**V**) Las curvas de nivel de $f(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$ son circunferencias

(5) (**F**) Dos diferentes curvas de nivel de la gráfica de $z = f(x,y)$ pueden intersecarse.

(6) (**V**) Si f es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y $f(0,0) = 0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

(7) (**V**) Si $z(x,y) = f(x)g(y)$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$

(8) (**F**) $\nabla f(a,b,c)$ es ortogonal al vector normal del plano tangente a la superficie $z = f(x,y,z)$ en (a,b,c)

(9) (**V**) Si $z(x,y) = e^{x+y}$, entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$

(10) (**F**) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}$ no existe

(II) Indique en cada caso la respuesta correcta.

(1) Si $f(x,y) = x^2 \sin(2y)$ y $\vec{u} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$, entonces la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(1,\pi/2)$ es igual a

a) 8/5
b) 3/5
c) 1/5
d) 0
e) Ninguna anterior

(2) La ecuación del plano tangente a la superficie $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ en el punto $(1,-1,4)$ está dada por

a) $x + y - 2z + 6 = 0$
b) $x - y + 2z + 6 = 0$
c) $x - y - 2z + 6 = 0$
d) $x - y - 2z - 6 = 0$
e) Ninguna anterior

(3) La a recta normal a la superficie dada por $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ en el punto $(1,-1,4)$ tiene ecuaciones simétricas dadas por

a) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}$

b) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$

c) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}$

d) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{2}$

e) Ninguna anterior

(III) Indique en cada caso la correcta.

Considere la función

$$f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y.$$

(1) El vector gradiente de f en un punto (x, y) es

a) $(9x^2 - 9)\hat{\imath} - (2y + 4)\hat{\jmath}$

b) $(9x^2 - 9)\hat{\imath} + (2y - 4)\hat{\jmath}$

c) $(9x^2 - 9)\hat{\imath} + (2y + 4)\hat{\jmath}$

d) $(9x^2 + 9)\hat{\imath} + (2y + 4)\hat{\jmath}$

e) Ninguna anterior

(2) Los punto críticos de f son

a) $(1, -2)$ y $(1, 2)$

b) $(1, -2)$ y $(-1, 2)$

c) $(1, 2)$ y $(-1, -2)$

d) $(1, -2)$ y $(-1, -2)$

e) Ninguna anterior

(3) Los puntos críticos de f se clasifican así

a) mínimo local en $(1, -2)$ y punto de silla en $(1, 2)$

b) mínimo local en $(1, -2)$ y punto de silla en $(-1, -2)$

c) Ninguna anterior

d) máximo local en $(1, -2)$ y punto de silla en $(-1, -2)$

e) máximo local en $(1, 2)$ y punto de silla en $(-1, -2)$

f) Ninguna anterior

(IV) Determine las dimensiones de un cilindro circular recto con volumen k unidades cúbicas y área superficial mínima

`Solución`. Supongamos que el cilindro tiene radio r y altura h. Entonces el área superficial en términos de estas variables está dado por:

$$A(r, h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

La restricción al problema es

$$V(r, h) = \pi r^2 h = k.$$

Entonces

$$\frac{\partial A}{\partial r} = 2\pi h + 4\pi r$$
$$\frac{\partial A}{\partial h} = 2\pi r$$
$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2.$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange tenemos que

$$2\pi h + 4\pi r = 2\lambda\pi r h \tag{1}$$
$$2\pi r = \lambda\pi r^2 \tag{2}$$
$$\pi r^2 h = k. \tag{3}$$

Equivalentemente,

$$h + 2r = \lambda r h \tag{4}$$
$$2 = \lambda r. \tag{5}$$

De (5) se sigue que $\lambda = 2/r$. Reemplazando en (4) tenemos $h + 2r = 2h$. Es decir, $h = 2r$. Usando ahora la ecuación (3) se tiene que $2\pi r^3 = k$ y en consecuencia

$$r = \sqrt[3]{k/2\pi} \quad \text{y} \quad h = 2\sqrt[3]{k/2\pi}.$$

Se verifica sin dificultades que este es el punto buscado.

Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Solución Examen parcial 2 - Cálculo 3 - 2018-30

B

(I) (10 Puntos) Indique si la proposición dada es falsa o verdadera.

(1) (**V**) La función $f(x,y)=\frac{4x}{x^2+y^2+1}$ tiene dominio $\mathbb{R}^2$

(2) (**F**) 0 no pertenece al rango o imagen de $f(x,y)=\frac{4x}{x^2+y^2+1}$

(3) (**F**) La función $f(x,y)=\frac{4x}{x^2+y^2+1}$ no es continua en $(0,0)$

(4) (**V**) Las curvas de nivel de $f(x,y)=e^{1-x^2-y^2}$ son circunferencias

(5) (**V**) Dos curvas de nivel distintas de $z=f(x,y)$ siempre tienen intersección vacía

(6) (**V**) Si f es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y $f(0,0)=0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

(7) (**V**) Si $z(x,y)=f(x)g(y)$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=f'(x)g(y)+f(x)g'(y)$

(8) (**F**) $\nabla f(a,b,c)$ es ortogonal al vector normal del plano tangente a la superficie $z=f(x,y,z)$ en (a,b,c)

(9) (**V**) Si $z(x,y)=e^{x-y}$, entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$

(10) (**V**) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}=0$

(II) (15 Puntos) Indique en cada caso la respuesta correcta.

(1) Si $f(x,y)=x^2\sin(2y)$ y $\vec{u}=-3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}$, entonces la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(1,\pi/2)$ es

a) -8/5
b) 3/5
c) -1/5
d) 0
e) Ninguna anterior

(2) El plano tangente a la superficie $2x^2+2y^2-z^2=12$ en el punto $(1,-1,4)$ tiene ecuación

a) $x+y-2z+6=0$
b) $x-y+2z+6=0$
c) $x-y-2z+6=0$
d) $x-y-2z-6=0$
e) Ninguna anterior

(3) La a recta normal a la superficie dada por $z^2-2x^2-2y^2=-12$ en el punto $(1,-1,4)$ tiene ecuaciones simétricas dadas por

a) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-4}{2}$
b) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{2}$

c) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}$

d) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{2}$

e) Ninguna anterior

(III) (15 Puntos) Indique en cada caso la correcta.

Considere la función

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(1) El vector gradiente de f en un punto (x,y) es

a) $(3x^2 - 3y)\hat{\imath} + (3y^2 + 3x)\hat{\jmath}$

b) $(3x^2 + 3y)\hat{\imath} + (3y^2 - 3x)\hat{\jmath}$

c) $(3x^2 - 3y)\hat{\imath} - (3y^2 - 3x)\hat{\jmath}$

d) $(3x^2 - 3y)\hat{\imath} + (3y^2 - 3x)\hat{\jmath}$

e) Ninguna anterior

(2) Los puntos críticos de f son

a) $(0,0)$

b) $(1,1)$

c) $(0,0)$ y $(1,1)$

d) $(0,0)$ y $(-1,-1)$

e) Ninguna anterior

(3) Los puntos críticos de f se clasifican así

a) punto de silla en $(0,0)$

b) mínimo local en $(1,1)$

c) mínimo local en $(1,1)$ y punto de silla en $(0,0)$

d) mínimo local en $(0,0)$ y punto de silla en $(1,1)$

e) Ninguna anterior

(IV) Encuentre el punto del plano $2x - 2y + z = 4$ que está más cerca del origen.

`Solución`. La distancia entre un punto (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ y el origen está dada por

$$D(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La monotonía de la función raiz cuadrada nos permite trabajar solo con el argumento. Es decir, trabajamos con

$$D(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

sujeto a la restricción $2x - 2y + z = 4$ o $g(x,y,z) = 2x - 2y + z - 4$.

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial x} &= 2x\\ \frac{\partial D}{\partial y} &= 2y\\ \frac{\partial D}{\partial z} &= 2z\\ \frac{\partial g}{\partial x} &= 2\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -2\\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 1.\end{aligned}$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange tenemos que

$$\begin{aligned}2x &= 2\lambda\\ 2y &= -2\lambda\\ 2z &= \lambda\\ 2x - 2y + z &= 4.\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}x &= \lambda && (6)\\ y &= -\lambda && (7)\\ z &= \lambda/2 && (8)\\ 2x - 2y + z &= 4. && (9)\end{aligned}$$

Entonces $x = -y = 2z = \lambda$. Reemplazando en (9) tenemos $\lambda = 8/9$. Es decir,

$$x = 8/9, \quad y = -8/9 \quad \text{y} \quad z = 4/9.$$

Se verifica sin dificultades que este es el punto buscado.