• Encuentre la función vectorial $r(t)$ que satisface las condiciones indicadas:

$r'(t) = t\,\text{Sen}\,t^2\,i - \text{Cos}(2t)\,j$; $r(0) = \frac{3}{2}i$.

Desarrollo.

$$r(t) = \int [t\,\text{Sen}\,t^2\,dt]\,i - \int [\text{Cos}(2t)\,dt]\,j$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\text{Cos}\,t^2 + C_1\right)i - \left(\frac{1}{2}\text{Sen}(2t) + C_2\right)j$$

Considerando la condición inicial $r(0) = \frac{3}{2}i$, tenemos

$$r(0) = \left(-\frac{1}{2} + C_1\right)i - C_2\,j = \frac{3}{2}i.$$

Así que, $\left(-\frac{1}{2} + C_1\right)i = \frac{3}{2}i \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + C_1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C_1 = 2$ y $C_2 = 0$.

Por lo tanto,

$$r(t) = \left(-\frac{1}{2}\text{Cos}\,t^2 + 2\right)i - \left(\frac{1}{2}\text{Sen}(2t)\right)j.$$

• Suponga que $r(t) = t^2 i + (t^3 - 2t) j + (t^2 - 5t) K$ es el vector de posición de una partícula en movimiento.

(a) ¿En qué puntos la partícula pasa por el plano xy?

(b) ¿Cuáles son su velocidad y aceleración en los puntos del inciso a)?

Desarrollo

a) La partícula pasa por el plano xy cuando $t^2 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ o $t = 5$.

b) Tenemos que $v(t) = 2t i + (3t^2 - 2) j + (2t - 5) K$ y $a(t) = 2i + 6t j + 2K$.

Así que la velocidad y aceleración en los puntos del inciso a) son respectivamente

$V(0) = -2j - 5K$, $V(5) = 10i + 73j + 5K$ y

$a(0) = 2i + 2K$, $a(5) = 2i + 30j + 2K$.

- Para la función de posición

$$r(t) = (t\cos t - \operatorname{Sen} t)i + (t \operatorname{Sen} t + \cos t)j + t^2 K, \quad t > 0,$$

encuentre el vector unitario tangente y el vector unitario normal principal.

Desarrollo.

Hallemos inicialmente el vector unitario tangente $T(t)$.

$$r'(t) = (\cos t - t\operatorname{Sen} t - \cos t)i + (\operatorname{Sen} t + t\cos t - \operatorname{Sen} t)j + 2tK$$

$$= -t\operatorname{Sen} t\, i + t\cos t\, j + 2tK.$$ Por otro lado,

$$\|r'(t)\| = \sqrt{t^2 \operatorname{Sen}^2 t + t^2 \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{t^2(\operatorname{Sen}^2 t + \cos^2 t) + 4t^2} = t\sqrt{5}.$$

Luego, $$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{t\sqrt{5}}(-t\operatorname{Sen} t\, i + t\cos t\, j + 2tK)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\operatorname{Sen} t\, i + \cos t\, j + 2K).$$

Hallemos ahora el vector unitario normal principal $N(t)$.

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\cos t\, i - \operatorname{Sen} t\, j) \quad \text{y} \quad \|T'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{Sen}^2 t} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto,

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = -\cos t\, i - \operatorname{Sen} t\, j.$$

- Hallar la curvatura de un círculo de radio r centrado en el origen.

Desarrollo

Un círculo de radio r se describe por medio de la función vectorial $r(t) = r\,\text{Cos}\,t\,i + r\,\text{Sen}\,t\,j$.

Ahora, $r'(t) = -r\,\text{Sen}\,t\,i + r\,\text{Cos}\,t\,j$ y $\|r'(t)\| = r$. Luego,

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = -\text{Sen}\,t\,i + \text{Cos}\,t\,j \quad y \quad T'(t) = -\text{Cos}\,t\,i - \text{Sen}\,t\,j.$$

Por lo tanto,

$$K = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{r}.$$

Así que la curvatura de un círculo de radio r es $K = \frac{1}{r}$.