Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer Parcial de Cálculo III

Nombre:____________________________________Octubre 16 de 2.018

Duración del parcial: 80 minutos **AAAAA**

Observaciones: Resolver de forma **clara y detallada** los incisos *II* y *III* para obtener la mayor valoración. Durante el parcial no está permitido (**hacerlo es causal de anulación**): Manipulación de celulares o relojes con cámara, hablar o prestar algún material con sus compañeros, utilizar calculadoras con lenguaje simbólico y el uso de libros o notas de clase.

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS

CUESTIONARIO

I. **(Valoración 2.0 pts.)** Seleccione (no es obligación justificar) la única opción correcta. N. A. significa ninguna de las anteriores.

1. La integral iterada que calcula el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = cos(x)$ entre $x = \frac{5\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$ es:

$(a)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_{sen(x)}^{cos(x)} dydx \quad (b)\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{cos(x)}^{sen(x)} dydx \quad (c)\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{cos(x)}^{sen(x)} dxdy \quad (d)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_{cos(x)}^{sen(x)} dydx$

2. Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R en el plano xy, entonces el **área de la superficie** S dada por $z = f(x, y)$ sobre R está dada por:

$(a)\int_R\int\sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}dA. \quad (b)\int_R\int\sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}dA.$

$(c)\int_R\int\sqrt{1 + [f_x(x,y)] + [f_y(x,y)]}dA. \quad (d) N.A.$

3. Al utilizar coordenadas polares, la integral $\displaystyle\int_0^2\int_x^{\sqrt{8-x^2}}\frac{1}{5+x^2+y^2}dydx$

se convierte en:

$(a)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{8}}\frac{1}{5+r^2}rdrd\theta \quad (b)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{8}}\frac{1}{5+r^2}rdrd\theta \quad (c)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{8}}\frac{1}{5+r^2}drd\theta \quad (d)\ N.A.$

4. El valor de la integral doble $\int_R\int e^{x+3y}dA$ sobre la región R acotada por las gráficas de $y = 1$, $y = 2$, $y = x$ y $y = -x + 5$ es

$(a) 18.75 \quad (b)\frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{4}e^8 \quad (c) -\frac{1}{2}e^7 + \frac{1}{4}e^4 \quad (d) N.A.$

II. Utilizar las coordenadas polares para hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio $z = f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e inferiormente por la región circular R dada por $x^2 + y^2 \leq 4$.

Desarrollo

Notese que la región R posee las cotas $-\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$ y $-2 \leq y \leq 2$. Además, para z tenemos que $0 \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2}$.

Tomando $x = r\,\mathrm{Cos}\,\theta$ e $y = r\,\mathrm{Sen}\,\theta$, se cumple que $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, con altura $z = \sqrt{16 - r^2}$. Por consiguiente,

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \sqrt{16 - r^2}\, r\, dr\, d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (16 - r^2)^{3/2} \Big/_0^2 \, d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[(16-4)^{3/2} - (16)^{3/2} \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (24\sqrt{3} - 64)\, d\theta = -\frac{1}{3} (24\sqrt{3} - 64)\, \theta \Big/_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{3} (24\sqrt{3} - 64)\, 2\pi \approx 46.979.$$

III. Hallar el centro de masa del cubo unidad, dado que la densidad en el punto (x,y,z) es proporcional al cuadrado de su distancia al origen.

Sug. Por la naturaleza de ρ y la simetría de x, y y z en esta región sólida, se tiene que $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$.

Desarrollo.

Tenemos que la densidad en el punto (x,y,z) es $\rho(x,y,z)=K(x^2+y^2+z^2)$.

Luego, la masa m es

$$m=K\int_0^1\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx=K\int_0^1\int_0^1\left[(x^2+y^2)z+\frac{z^3}{3}\right]\Big/_0^1 dy\,dx$$

$$=K\int_0^1\int_0^1\left(x^2+y^2+\frac{1}{3}\right)dy\,dx=K\int_0^1\left[\left(x^2+\frac{1}{3}\right)y+\frac{y^3}{3}\right]\Big/_0^1 dx=K\int_0^1\left(x^2+\frac{2}{3}\right)dx$$

$$=K\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x\right)\Big/_0^1=K\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=K.$$

Ahora, teniendo en cuenta el desarrollo anterior, se cumple que el primer momento con respecto al plano yz es

$$M_{yz}=K\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx=K\int_0^1 x\left[\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\right]dx$$

$$=K\int_0^1 x\left(x^2+\frac{2}{3}\right)dx=K\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{3}x^2\right)\Big/_0^1=K\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{12}K.$$

Así que $\bar{x}=\dfrac{\frac{7K}{12}}{K}=\dfrac{7}{12}$.

Por la sugerencia dada tenemos que el centro de masa es

$\left(\frac{7}{12},\frac{7}{12},\frac{7}{12}\right)$.