UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo 3
Fila B
Abril 7 de 2018

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[10 pts]** Usando derivación implícita, determine las primeras derivadas parciales de z.

$$e^{yz} + xy = 0.$$

2. **[10 pts]** La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica es

$$T(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

   Halle la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(4, 3)$.

3. **[15 pts]** Halle una ecuación del plano y determine ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie en el punto dado.

$$z = xe^{2xy}; \qquad (2, 0, 2).$$

4. **[15 pts]** Un contenedor de carga (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 500 pies cúbicos. La parte inferior costará $5 por pie cuadrado para construir, y los lados y la parte superior costarán $3 por pie cuadrado para construcción. Encuentre las dimensiones del contenedor de este tamaño que tiene costo mínimo.

Tiempo máximo: 80 minutos.

IMPORTANTE: Durante la realización del examen está prohibido el uso de calculadoras, celulares, relojes digitales y dispositivos electrónicos en general. El incumplimiento de esta norma será causal de anulación de la prueba.

Solución del parcial II - fila B
Cálculo 3 - 201810

1) Consideremos la función

$F(x,y,z) = e^{yz} + xy$

entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = \frac{-y}{ye^{yz}} = \frac{-1}{e^{yz}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{-ze^{yz} + x}{ye^{yz}}$$

2) $T(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\nabla T = T_x \hat{\imath} + T_y \hat{\jmath}$$
$$= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\hat{\imath} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\hat{\jmath}$$

La dirección de mayor incremento de calor en el punto $(4,3)$ es

$$\nabla T(4,3) = -\frac{24}{625}\hat{\imath} + \frac{7}{625}\hat{\jmath}$$

3) $z = xe^{2xy}$; $(2,0,2)$

Consideremos la ecuación

$F(x,y,z) = xe^{2xy} - z$

Tenemos

$$F_x = e^{2xy} + xe^{2xy}\cdot 2y = e^{2xy}(1+2xy)$$
$$F_y = xe^{2xy}\cdot 2x = 2x^2 e^{2xy}$$
$$F_z = -1$$

Ahora bien,

$F_x(2,0,2) = 1$; $F_y(2,0,2) = 8$; $F_z = -1$

La ecuación del plano tangente es

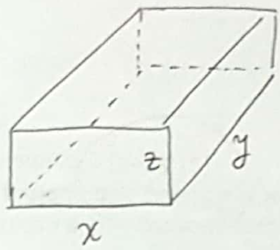
$$1(x-2) + 8(y-0) - 1(z-2) = 0$$

$$x + 8y - z = 0.$$

Las ecuaciones simétricas de la recta tangente son:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{8} = \frac{z-2}{-1}$$

4)



$xyz = 500$

$x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$

$$C(x,y,z) = 5xy + 3xy + 6xz + 6yz$$
$$= 8xy + 6xz + 6yz$$

Restricción: $g(x,y,z) = xyz - 500$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, tenemos

$$\begin{cases} 8y + 6z = \lambda yz & (i) \\ 8x + 6z = \lambda xz & (ii) \\ 6x + 6y = \lambda xy & (iii) \end{cases}$$

$(i) \div (ii)$: $\dfrac{8y+6z}{8x+6z} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \cancel{8xy} + 6xz = \cancel{8xy} + 6yz$

$\Rightarrow x = y$

$(ii) \div (iii)$: $\dfrac{8x+6z}{6x+6y} = \dfrac{z}{y} \Rightarrow 8xy + \cancel{6yz} = 6xz + \cancel{6yz}$

$\Rightarrow z = \frac{4}{3}y.$

Luego,

$$y \cdot y \cdot \frac{4}{3}y = 500 \Rightarrow y^3 = \frac{3\cdot 500}{4}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{375}$$
$$x = \sqrt[3]{375}$$
$$z = \frac{4}{3}\sqrt[3]{375}$$

Scanned by CamScanner

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo 3
Fila A
Abril 7 de 2018

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. [**10 pts**] Usando derivación implícita, determine las primeras derivadas parciales de z.

$$e^{xz} + xy = 0.$$

2. [**10 pts**] La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica es

$$T(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Halle la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3, 4)$.

3. [**15 pts**] Halle una ecuación del plano y determine ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie en el punto dado.

$$z = ye^{2xy}; \qquad (0, 2, 2).$$

4. [**15 pts**] Un contenedor de carga (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. La parte inferior costará $5 por pie cuadrado para construir, y los lados y la parte superior costarán $3 por pie cuadrado para construcción. Encuentre las dimensiones del contenedor de este tamaño que tiene costo mínimo.

Tiempo máximo: 80 minutos.

IMPORTANTE: Durante la realización del examen está prohibido el uso de calculadoras, celulares, relojes digitales y dispositivos electrónicos en general. El incumplimiento de esta norma será causal de anulación de la prueba.

Solución del parcial II - fila A
Cálculo 3 - 201810

1) Consideremos la función

$F(x,y,z) = e^{xz} + xy$

entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = -\frac{ze^{xz}+y}{xe^{xz}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-x}{xe^{xz}} = \frac{-1}{e^{xz}}$$

2) $T(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$\nabla T = T_x\,\hat{\imath} + T_y\,\hat{\jmath}$$

$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\hat{\imath} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\hat{\jmath}$$

La dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3,4)$ es

$$\nabla T(3,4) = \frac{7}{625}\,\hat{\imath} - \frac{24}{625}\,\hat{\jmath}$$

3) $z = ye^{2xy}$; $(0,2,2)$.

Consideremos la ecuación

$F(x,y,z) = ye^{2xy} - z$

Tenemos

$F_x = ye^{2xy}\cdot 2y = 2y^2e^{2xy}$

$F_y = e^{2xy} + ye^{2xy}\cdot 2x = e^{2xy}(1+2xy)$

$F_z = -1$

Ahora bien,

$F_x(0,2,2) = 8$; $F_y(0,2,2) = 1$; $F_z(0,2,2) = -1$

la ecuación del plano tangente es

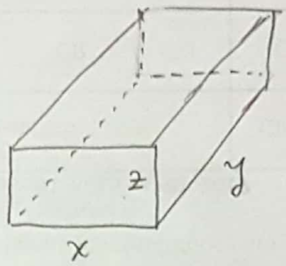
$$8(x-0) + 1(y-2) - (z-2) = 0$$

$$8x + y - z = 0$$

Las ecuaciones simétricas de la recta tangente son:

$$\frac{x-0}{8} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

4)



$xyz = 480$

$x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0.$

$$C(x,y,z) = 5xy + 3xy + 6xz + 6yz.$$
$$= 8xy + 6xz + 6yz.$$

Restricción: $g(x,y,z) = xyz - 480.$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, tenemos

$$\begin{cases} 8y + 6z = \lambda yz & \text{(i)} \\ 8x + 6z = \lambda xz & \text{(ii)} \\ 6x + 6y = \lambda xy & \text{(iii)} \end{cases}$$

$$\text{(i)} \div \text{(ii)}:\ \frac{8y+6z}{8x+6z} = \frac{y}{x} \Rightarrow \cancel{8xy} + 6xz = \cancel{8xy} + 6yz$$

$$\Rightarrow x = y.$$

$$\text{(ii)} \div \text{(iii)}:\ \frac{8x+6z}{6x+6y} = \frac{z}{y} \Rightarrow 8xy + \cancel{6yz} = 6xz + \cancel{6yz}$$

$$\Rightarrow z = \frac{4}{3}y.$$

Luego, $y \cdot y \cdot \frac{4}{3}y = 480 \Rightarrow y^3 = \dfrac{3\cdot 480}{4}$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{360}$$
$$x = \sqrt[3]{360}$$
$$z = \frac{4}{3}\sqrt[3]{360}$$