UNIVERSIDAD DEL NORTE.
Departamento de Matemáticas y Estadística.
Examen final de Algebra Lineal.
Noviembre 21 de 2018
Fila A

Nombre	Profesor

Observaciones.

Responda el punto I en la hoja de preguntas. No requiere justificación.
En los puntos II, III y IV justifique sus procedimientos.
Valoración: Punto I (2.0/5.0), puntos II, III y IV (1.0/5.0 cada uno.)
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos como celulares, audífonos, relojes y calculadoras.
No hay preguntas.
Tiempo máximo: 1 hora 30 minutos.

I. En cada caso, elija (marque con X o encierre en un círculo) la (única) opción correcta. (N.A. es ninguna de las anteriores).

1. El ángulo entre los vectores $v = (1, 1, 2)$ y $w = (-1, 1, -3)$ es
   •(a.) Obtuso. (b.) Recto. (c.) Agudo. (d.) N.A.

2. El área del triángulo con vértices en los puntos $(1, 2), (3, 3)$ y $(1, -1)$ es
   (a.) 6. •(b.) 3 (c.) $\sqrt{3}$. (d.) N.A.

3. Una ecuación vectorial para la recta, en el plano, con ecuación $2x + 3y = 6$ es:
   •(a.) $(x, y) = (3t, -2t + 2)$. (b.) $(x, y) = (3 + 2t, 3t)$. (c.) $(x, y) = (2t, 2 - 3t)$. (d.) N.A.

4. Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 0$, entonces los puntos cuyas coordenadas son las filas de la matriz son
   (a.) No colineales. (b.) Colineales. (c.) Vértices de un triángulo. •(d.) N.A.

5. Un vector paralelo al plano de ecuación $x + 2y - 3z = 5$ es
   (a.) $(1, 2, -3)$. (b.) $(1, -2, 3)$. •(c.) $(0, 3, 2)$. (d.) N.A.

6. El subespacio generado por los vectores $(1, 1, -2), (1, 3, 5)$ y $(3, 5, 1)$ tiene dimensión
   (a.) 3. •(b.) 2. (c.) 1. (d.) N.A.

7. Un subespacio de $\mathbb{R}^3$ es
   (a.) $\{(x, y, z) | x + y + 3z = 1\}$. (b.) $\{(2 + t, t - 2, t) | t \in \mathbb{R}\}$.
   •(c.) $\{(t, t + s, s) | t, s \in \mathbb{R}\}$. (d.) N.A.

8. Una base para el subespacio $\{(x,y,z)|x+y-3z=0\}$ es
   (a.) $\{(1,1,-3)\}$. •(b) $\{(-1,1,0),(3,0,1)\}$.
   (c). $\{(-1,1,0),(1,-1,0)\}$. (d.) N.A.

II. Considere los puntos $P(1,2,3), Q(2,-1,5)$ y $R(2,3,4)$.

1. Demuestre que los puntos no son colineales y son vértices de un triángulo rectángulo con vértice en P.
   Solución.
   Consideramos los vectores $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,-3,2), \overrightarrow{PR}=R-P=(1,1,1)$, los cuales no son paralelos (por no ser múltiplos escalares), de modo que P,Q, y R no son colineales. Así, son vértices de un triángulo.
   Como $\overrightarrow{PQ}\bullet\overrightarrow{PR}=1-3+2=0$, se tiene que el ángulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ es recto, por lo que el triángulo es rectángulo, siendo P el vértice donde se encuentra el ángulo recto.

2. Determine el área del triángulo y utilícela para determinar la distancia del punto P a la recta que pasa por los otros dos puntos.
   Solución. El área del triángulo es $a=\dfrac{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PR}\|}{2}=\dfrac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{42}}{2}$. La altura del triángulo con relación a la hipotenusa $\overline{QR}$ es la distancia, d, del punto P a dicha hipotenusa, se tiene entonces $\overrightarrow{QR}=R-Q=(0,4,-1)$, por lo que

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{QR}\| &= \sqrt{17}\\ a &= \frac{\|\overrightarrow{QR}\|d}{2}\\ d &= \frac{2a}{\|\overrightarrow{QR}\|}\\ &= \sqrt{\frac{42}{17}}\end{aligned}$$

III. Considere las rectas $\begin{cases} L_1: & (x,y,z)=(2+t,3-t,5-t)\\ L_2: & (x,y,z)=(1,2,3)+t(1,-1,-1)\end{cases}$.

Demuestre que las rectas L_1 y L_2 son paralelas pero distintas y encuentre una ecuación vectorial y una cartesiana para el plano único que las contiene.
Solución. La ecuación de L_1 es $(x,y,z)=(2,3,5)+t(1,-1,-1)$, que muestra que el vector $v=(1,-1,-1)$ es un vector paralelo a L_1. Este mismo vector, como lo muestra la ecuación de L_2, es paralelo a L_2, de modo que L_1 y L_2 son rectas paralelas.
Si las rectas fuesen coincidentes, el punto $P(1,2,3)\in L_2$, debería estar en L_1, por lo que debería existir un escalar t tal que

$$(2+t,3-t,5-t)=(1,2,3)$$

pero, igualando componentes, se debería tener $t=-1=1=2$, lo cual es absurdo. Así $L_1\neq L_2$.

Si $Q(2,3,5)$, el vector $w = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,1,2)$ es un vector paralelo al plano que contiene a las dos rectas. De igual manera, v es paralelo a dicho plano y no es paralelo a w. Una ecuación vectorial para el plano es

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t(1,-1,-1) + s(1,1,2), t, s \in \mathbb{R}.$$

Una normal al plano es $n = v \times w = (1,3,-2)$, por lo que una ecuación cartesiana para el plano es

$$(1,3,-2) \bullet (x,y,z) = (1,3,-2) \bullet (1,2,3) \Longleftrightarrow x + 3y - 2z = 1.$$

IV. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Determine los valores y vectores propios de A y muestre una base para $\mathbb{R}^2$ formada con vectores propios de A.

Solución. Los valores propios son las raíces del polinomio característico

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Luego los valores propios de A son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -2$. Para hallar $V(A,5)$, resolvemos el sistema homogéneo con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Claramente el sistema es equivalente a la ecuación homogénea $x + y = 0$ con conjunto solución $V(A,5) = \{(t,-t) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1) \rangle$.
En forma similar, para $\lambda_2 = -2$, obtenemos el sistema con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

equivalente a la ecuación $3x - 4y = 0$, la cual tiene solución

$$V(A,-2) = \left\{ \left(\frac{4}{3}t, t \right) | t \in \mathbb{R} \right\} = \langle (4,3) \rangle.$$

Puesto que $\{(1,-1), (4,3)\}$ es un conjunto de dos vectores l.i, entonces es una base para $\mathbb{R}^2$ formada con vectores propios.

UNIVERSIDAD DEL NORTE.
Departamento de Matemáticas y Estadística.
Examen final de Algebra Lineal.
Noviembre 21 de 2018
Fila B

Nombre	Profesor

Observaciones.

Responda el punto I en la hoja de preguntas. No requiere justificación.
En los puntos II, III y IV justifique sus procedimientos.
Valoración: Punto I (2.0/5.0), puntos II, III y IV (1.0/5.0 cada uno.)
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos como celulares, audífonos, relojes y calculadoras.
No hay preguntas.
Tiempo máximo: 1 hora 30 minutos.

I. En cada caso, elija (marque con X o encierre en un círculo) la (única) opción correcta. (N.A. es ninguna de las anteriores).

1. El ángulo entre los vectores $v = (1, 1, 2)$ y $w = (-1, 1, 3)$ es
   (a.) Obtuso. (b.) Recto. • (c.) Agudo. (d.) N.A.

2. Una ecuación vectorial para la recta, en el plano, con ecuación $2x + 3y = 6$ es:
   •(a.) $(x, y) = (3t, -2t + 2)$. (b.) $(x, y) = (3 + 2t, 3t)$. (c.) $(x, y) = (2t, 2 - 3t)$. (d.) N.A.

3. El área del triángulo con vértices en los puntos $(1, 2), (3, 3)$ y $(1, -1)$ es
   (a.) 6. •(b.) 3 (c.) $\sqrt{3}$. (d.) N.A.

4. Un vector paralelo al plano de ecuación $x + 2y - 3z = 5$ es
   (a.) $(1, 2, -3)$. (b.) $(1, -2, 3)$. •(c.) $(0, 3, 2)$. (d.) N.A.

5. Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 0$, entonces los puntos cuyas coordenadas son las filas de la matriz son
   (a.) No colineales. (b.) Colineales. (c.) Vértices de un triángulo. •(d.) N.A.

6. El subespacio generado por los vectores $(1, 1, -2), (1, 3, 5)$ y $(3, 5, 1)$ tiene dimensión
   (a.) 3. (b.) 1. •(c.) 2. (d.) N.A.

7. Una base para el subespacio $\{(x, y, z)|x + y - 3z = 0\}$ es
   (a.) $\{(1, 1, -3)\}$. •(b) $\{(-1, 1, 0), (3, 0, 1)\}$.
   (c). $\{(-1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$. (d.) N.A.

8. Un subespacio de $\mathbb{R}^3$ es
   $\bullet$(a.) $\{(t, t+s, s) | t, s \in \mathbb{R}\}$. (b.) $\{(2+t, t-2, t) | t \in \mathbb{R}\}$.
   (c.) $\{(x, y, z) | x + y + 3z = 1\}$. (d.) N.A.

II. Considere los puntos $P(1,2,3), Q(2,3,4)$ y $R(2,-1,5)$.

1. Demuestre que los puntos no son colineales y son vértices de un triángulo rectángulo con vértice en P.
   Solución.
   Consideramos los vectores $\overrightarrow{PR} = R - P = (1,-3,2), \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,1,1)$, los cuales no son paralelos (por no ser múltiplos escalares), de modo que P, Q, y R no son colineales. Así, son vértices de un triángulo.
   Como $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR} = 1 - 3 + 2 = 0$, se tiene que el ángulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ es recto, por lo que el triángulo es rectángulo, siendo P el vértice donde se encuentra el ángulo recto.

2. Determine el área del triángulo y utilícela para determinar la distancia del punto P a la recta que pasa por los otros dos puntos.
   Solución. El área del triángulo es $a = \dfrac{\|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{PR}\|}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{14}}{2} = \dfrac{\sqrt{42}}{2}$. La altura del triángulo con relación a la hipotenusa $\overline{RQ}$ es la distancia, d, del punto P a dicha hipotenusa, se tiene entonces $\overrightarrow{RQ} = Q - R = (0,4,-1)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{RQ}\| &= \sqrt{17} \\
a &= \frac{\|\overrightarrow{RQ}\| d}{2} \\
d &= \frac{2a}{\|\overrightarrow{RQ}\|} \\
&= \sqrt{\frac{42}{17}}
\end{aligned}$$

III. Considere las rectas $\begin{cases} L_1: & (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,-1,-1) \\ L_2: & (x,y,z) = (2+t, 3-t, 5-t) \end{cases}$.
Demuestre que las rectas L_1 y L_2 son paralelas pero distintas y encuentre una ecuación vectorial y una cartesiana para el plano único que las contiene.
Solución. La ecuación de L_2 es $(x,y,z) = (2,3,5) + t(1,-1,-1)$, que muestra que el vector $v = (1,-1,-1)$ es un vector paralelo a L_2. Este mismo vector, como lo muestra la ecuación de L_1, es paralelo a L_1, de modo que L_1 y L_2 son rectas paralelas.
Si las rectas fuesen coincidentes, el punto $P(1,2,3) \in L_1$, debería estar en L_2, por lo que debería existir un escalar t tal que

$$(2+t, 3-t, 5-t) = (1,2,3)$$

pero, igualando componentes, se debería tener $t = -1 = 1 = 2$, lo cual es absurdo. Así $L_1 \neq L_2$.
Si $Q(2,3,5)$, el vector $w = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,1,2)$ es un vector paralelo al plano que

contiene a las dos rectas. De igual manera, v es paralelo a dicho plano y no es paralelo a w. Una ecuación vectorial para el plano es

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, -1, -1) + s(1, 1, 2), t, s \in \mathbb{R}.$$

Una normal al plano es $n = v \times w = (1, 3, -2)$, por lo que una ecuación cartesiana para el plano es

$$(1, 3, -2) \bullet (x, y, z) = (1, 3, -2) \bullet (1, 2, 3) \Longleftrightarrow x + 3y - 2z = 1.$$

IV. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determine los valores y vectores propios de A y muestre una base para $\mathbb{R}^2$ formada con vectores propios de A.
Solución. Los valores propios son las raíces del polinomio característico

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Luego los valores propios de A son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -2$. Para hallar $V(A, 5)$, resolvemos el sistema homogéneo con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Claramente el sistema es equivalente a la ecuación homogénea $x - y = 0$ con conjunto solución $V(A, 5) = \{(t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1) \rangle$.
En forma similar, para $\lambda_2 = -2$, obtenemos el sistema con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -4 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

equivalente a la ecuación $3x + 4y = 0$, la cual tiene solución

$$V(A, -2) = \left\{ \left(\frac{-4}{3} t, t \right) | t \in \mathbb{R} \right\} = \langle (-4, 3) \rangle.$$

Puesto que $\{(1, 1), (-4, 3)\}$ es un conjunto de dos vectores l.i, entonces es una base para $\mathbb{R}^2$ formada con vectores propios.