UNIVERSIDAD DEL NORTE
División de Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas.
Segundo parcial de Algebra Lineal. 1031-51,52,53. Octubre 3 de 2018
M. Sc. Sebastián Castañeda H
A

I. En cada caso escoja la (única) opción correcta.

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & a & 3 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$ es invertible entonces
(a) $a \neq 0, a \neq 3$. •(b) $a \notin \{0, 3, -3\}$. (c) $a \neq -3$. (d) N.A.
Justificación: A es invertible si y solo si $det(A) = a(a^2 - 9) = a(a+3)(a-3) \neq 0$, por lo que $a \notin \{0, 3, -3\}$.

2. Si $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ y $det(A) = 3$, entonces
(a) $det(2A) = 6$. (b)$det(3A)^T = 9$. (c) $det(3A) = 81$. •(d) N. A.
Justificación. $det(2A) = 2^4 det(A) = 16(3) = 48, det(3A)^T = det(3A) = 3^4(3) = 243$.

3. Si A es una matriz singular $n \times n$ y B es invertible $n \times n$, entonces
(a.) Al menos una fila es múltiplo escalar de otra. (b.) $A^T B$ es no singular.
•(c.) La F.E.R de A tiene el último renglón nulo. (d.) N.A
Justificación: Si A es singular, la forma escalonada reducida no es I_n, por lo que al menos el último renglón de la F.E.R es un renglón nulo.

4. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño con $det(A) = 2, det(B) = 3$, entonces
(a.) $A+B$ es invertible. (b.) $det(A-B) = -1$. (c.) $A-B$ es invertible. •(d.) N.A.
Justificación. Que A y B sean invertibles, no garantiza que $A + B$ o $A - B$ lo sean. Tampoco, en general, es verdadero que $det(A - B) = det(A) - det(B)$. Por ejemplo, considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Tales matrices satisfacen la hipótesis dada, $det(A) = 2, det(B) = 3$, pero $A + B$ no es invertible, pues $det(A + B) = 0$. Además $det(A - B) = 10$. Si se toma $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A - C$ no es invertible.

5. Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $2A + 5I_n = 3BA$, entonces
(a.) B es invertible. (b.) BA es invertible. •(c.) $2I_n - 3B$ es invertible. (d.) N.A.
Justificación: De $2A + 5I_n = 3BA$, se tiene que $\frac{-1}{5}(2A - 3BA) = I_n$, entonces $\frac{-1}{5}(2I_n - 3B)A = I_n$, por lo que $(2I_n - 3B)\left(\frac{-1}{5}A\right) = I_n$, luego $(2I_n - 3B)^{-1} = \frac{-1}{5}A$.

II. Suponga que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$. Calcule (justifique):

(a.) $\det(A)$. (b.) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2g & -2h & -2i \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix}$. (c.) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & e+2 & f+3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \end{vmatrix}$.

Solución:
(a.)

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} -1F_1+F_2 \\ -1F_1+F_3 \\ = \\ -1F_1+F_4 \\ F_2 \longleftrightarrow F_3 \end{matrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -(4)(-8) = 32 \end{aligned}$$

(b.)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2g & -2h & -2i \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}F_1 \\ \frac{-1}{2}F_2 \\ = \\ \frac{1}{2}F_3 \end{matrix} & \; 3(-2)(2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} F_2 \longleftrightarrow F_3 \\ = \end{matrix} & \; 12\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ = & \; 12(-3) = -36 \end{aligned}$$

(c.) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & e+2 & f+3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \end{vmatrix} \begin{matrix} -1F_6+F_4 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \end{vmatrix} = 0$, pues la fila cinco es el doble de la cuarta.

III. Sean A y B matrices 2×2 sobre el campo real. Si

$$(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

determine:

1. $(3AB^{-1})^{-1}$.
2. $(3A^T)^{-1}$
3. Una matriz X tal que $2AX = B$.

Solución: De $(2A)^{-1} = \dfrac{1}{2}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ se obtiene que $A^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. También se tiene que $B = (B^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

1. $(3AB^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{3}BA^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \dfrac{44}{3} \\ \dfrac{14}{3} & \dfrac{44}{3} \end{pmatrix}$.

2. $(3A^T)^{-1} = \dfrac{1}{3}(A^{-1})^T = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{3} & \dfrac{8}{3} \end{pmatrix}$.

3. $$\begin{aligned} 2AX = B \quad &\Longrightarrow \quad X = (2A)^{-1}B \\ &\Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Valoración: I (2.0), II y III (1.5 cada uno)
Tiempo máximo: 1 hora 15 minutos.

UNIVERSIDAD DEL NORTE
División de Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas.
Segundo parcial de Algebra Lineal. 1031-51,52,53. Octubre 3 de 2018
M. Sc. Sebastián Castañeda H
B

I. En cada caso escoja la (única) opción correcta.

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ es invertible entonces
   • (a) $a \neq 0, a \neq 2, a \neq -2$. (b) $a \notin \{0, 2\}$. (c) $a \neq 2$. (d) N.A.
   Justificación: A es invertible si y solo si $det(A) = a(a^2 - 4) = a(a+2)(a-2) \neq 0$, por lo que $a \neq 0, a \neq 2, a \neq -2$.

2. Si $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ y $det(A) = 3$, entonces
   (a) $det(2A) = 6$. (b)$det(3A)^T = 9$. (c) $det(3A) = 81$. •(d) N. A.
   Justificación. $det(2A) = 2^4 det(A) = 16(3) = 48, det(3A)^T = det(3A) = 3^4(3) = 243$.

3. Si A es una matriz singular $n \times n$ y B es invertible $n \times n$, entonces
   •(a.) La F.E.R de A tiene el último renglón nulo. (b.) $A^T B$ es no singular.
   (c.) Al menos una fila es múltiplo escalar de otra. (d.) N.A
   Justificación: Si A es singular, la forma escalonada reducida no es I_n, por lo que al menos el último renglón de la F.E.R es un renglón nulo.

4. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño con $det(A) = 2, det(B) = 3$, entonces
   (a.) $A + B$ es invertible (b.) $det(2A + B) = 7$. (c.) $A - B$ es invertible. •(d.) N.A.
   Justificación. Que A y B sean invertibles, no garantiza que $A+B$ o $A-B$ lo sean. Por ejemplo, considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Tales matrices satisfacen la hipótesis dada, $det(A) = 2, det(B) = 3$, pero $A + B$ no es invertible, pues $det(A + B) = 0$. Además $det(2A + B) = 1$. Si se toma $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A - C$ no es invertible.

5. Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $2A + 5I_n = 3BA$, entonces
   (a.) B es invertible. •(b.) $2I_n - 3B$ es invertible. (c.)BA es invertible. (d.) N.A
   Justificación: De $2A + 5I_n = 3BA$, se tiene que $\frac{-1}{5}(2A - 3BA) = I_n$, entonces $\frac{-1}{5}(2I_n - 3B)A = I_n$, por lo que $(2I_n - 3B)\left(\frac{-1}{5}A\right) = I_n$, luego $(2I_n - 3B)^{-1} = \frac{-1}{5}A$.

II. Suponga que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$. Calcule (justifique):

(a.) $\det(A)$. (b.) $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3g & 3h & 3i \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix}$. (c.) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & e+2 & f+3 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Solución:

(a.)

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -1F_1 + F_2 \\ -1F_1 + F_3 \\ = \\ -1F_1 + F_4 \\ F_2 \longleftrightarrow F_4 \end{array} \; - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -(4)(8) = -32$$

(b.)

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3g & 3h & 3i \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} \begin{array}{c} \frac{1}{-2}F_1 \\ \frac{1}{3}F_2 \\ = \\ \frac{1}{2}F_3 \end{array} (-2)(3)(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_3 \\ = \end{array} 12 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= 12(3) = 36$$

(c.) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & e+2 & f+3 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{c} -1F_5 + F_4 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, pues la fila seis es el doble de la cuarta.

III. Sean A y B matrices 2×2 sobre el campo real. Si

$$(2B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

determine:

1. $(3BA^{-1})^{-1}$.
2. $(3B^T)^{-1}$
3. Una matriz X tal que $2BX = A$.

Solución: De $(2B)^{-1} = \dfrac{1}{2}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ se obtiene que $B^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. También se tiene que $A = (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

1. $(3BA^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{3}AB^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \dfrac{44}{3} \\ \dfrac{14}{3} & \dfrac{44}{3} \end{pmatrix}$.

2. $(3B^T)^{-1} = \dfrac{1}{3}(B^{-1})^T = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{3} & \dfrac{8}{3} \end{pmatrix}$.

3.
$$\begin{aligned} 2BX = A \quad &\Longrightarrow \quad X = (2B)^{-1}A \\ &\Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Valoración: I (2.0), II y III (1.5 cada uno)
Tiempo máximo: 1 hora 15 minutos.

UNIVERSIDAD DEL NORTE
División de Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas.
Segundo parcial de Algebra Lineal. 1031-51,52,53. Octubre 3 de 2018
M. Sc. Sebastián Castañeda H
C

I. En cada caso escoja la (única) opción correcta.

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ es invertible entonces
   (a) $a \neq 1, a \neq -1$. (b) $a \notin \{0,1\}$. •(c) $a \neq 1, a \neq -1, a \neq 0$. (d) N.A.
   Justificación: A es invertible si y solo si $det(A) = a(a^2-1) = a(a+1)(a-1) \neq 0$, por lo que $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1$.

2. Si $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ y $det(A) = 3$, entonces
   (a) $det(2A) = 6$. (b)$det(3A)^T = 9$. (c) $det(3A) = 81$. •(d) N. A.
   Justificación. $det(2A) = 2^4 det(A) = 16(3) = 48, det(3A)^T = det(3A) = 3^4(3) = 243$.

3. Si A es una matriz singular $n \times n$ y B es invertible $n \times n$, entonces
   (a.) $A^T B$ es no singular. •(b.) La F.E.R de A tiene el último renglón nulo.
   (c.) Al menos una fila es múltiplo escalar de otra. (d.) N.A
   Justificación: Si A es singular, la forma escalonada reducida no es I_n, por lo que al menos el último renglón de la F.E.R es un renglón nulo.

4. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño con $det(A) = 2, det(B) = 3$, entonces
   (a.) $A+B$ es invertible (b.) $det(A+B) = 5$ (c.) $A-B$ es invertible. •(d.) N.A.
   Justificación. Que A y B sean invertibles, no garantiza que $A+B$ o $A-B$ lo sean. Tampoco, en general, es verdadero que $det(A+B) = det(A) + det(B)$. Por ejemplo, considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Tales matrices satisfacen la hipótesis dada, $det(A) = 2, det(B) = 3$, pero $A+B$ no es invertible, pues $det(A+B) = 0$. Si se toma $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A - C$ no es invertible.

5. Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $2A + 5I_n = 3BA$, entonces
   • (a.) $2I_n - 3B$ es invertible. (b.) B es invertible. (c.) BA es invertible. (d.) N.A
   Justificación: De $2A + 5I_n = 3BA$, se tiene que $\frac{-1}{5}(2A - 3BA) = I_n$, entonces $\frac{-1}{5}(2I_n - 3B)A = I_n$, por lo que $(2I_n - 3B)\left(\frac{-1}{5}A\right) = I_n$, luego $(2I_n - 3B)^{-1} = \frac{-1}{5}A$.

II. Suponga que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$. Calcule (justifique):

(a.) $\det(A)$. (b.) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -3g & -3h & -3i \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix}$. (c.) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & e-2 & f-3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \end{vmatrix}$.

Solución:

(a.)

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 11 \end{vmatrix} \\
\begin{array}{c} -1F_1+F_2 \\ -1F_1+F_3 \\ = \\ -3F_1+F_4 \\ F_2 \longleftrightarrow F_3 \end{array} & \quad - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -(4)(-8) = 32
\end{aligned}
$$

(b.)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -3g & -3h & -3i \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \frac{1}{2}F_1 \\ \frac{1}{-3}F_2 \\ = \\ \frac{1}{2}F_3 \end{array} (2)(-3)(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
& \begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_3 \\ = \end{array} \quad 12 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
& = \quad 12(-3) = -36
\end{aligned}
$$

(c.) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & e-2 & f-3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \end{vmatrix} \begin{array}{c} -1F_6+F_4 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \end{vmatrix} = 0$, pues la fila cinco es múltiplo escalar de la cuarta.

III. Sean A y B matrices 2×2 sobre el campo real. Si

$$(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

determine:

1. $(3AB^{-1})^{-1}$.
2. $(3A^T)^{-1}$
3. Una matriz X tal que $2AX = B$.

Solución: De $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ se obtiene que $A^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
También se tiene que $B = (B^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

1. $(3AB^{-1})^{-1} = \frac{1}{3}BA^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{28}{3} \\ \frac{14}{3} & \frac{40}{3} \end{pmatrix}$.

2. $(3A^T)^{-1} = \frac{1}{3}(A^{-1})^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

3. $$\begin{aligned} 2AX = B &\implies X = (2A)^{-1}B \\ &\implies X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &\implies X = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Valoración: I (2.0), II y III (1.5 cada uno)
Tiempo máximo: 1 hora 15 minutos.