UNIVERSIDAD DEL NORTE
EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS BÁSICAS
18 DE MAYO DE 2018 (C)

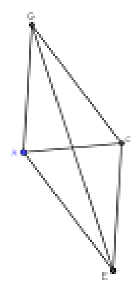
Nombre____

Información útil:

F.P.D.	F.P.I.	F.E.
$y = f(x) = kx^p$	$y = f(x) = \dfrac{k}{x^p}$	$y = f(x) = ka^x$

En todos los casos, $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$,

1. El área de un triángulo depende de su base (b) y de su altura (h) según la fórmula
$$\frac{bh}{2}$$
¿Cómo debe modificarse la altura de un triángulo si la base se ha reducido en un 20% y se requiere que el área sea la misma?

2. El área de un rombo, depende de sus diagonales, según la fórmula
$$\frac{Dd}{2}$$


AF y GE diagonales

Si una de las diagonales se aumentó en un 25% ¿cómo debe modificarse la otra diagonal del rombo para que su área siga teniendo el mismo valor?

3. Una variable S varía directamente a la segunda potencia de P e inversamente a la raíz cúbica de H. Escriba una fórmula acorde a esta relación.

4. Una variable M varía directamente al cubo de J e inversamente a la raiz cuadrada de T. Escriba una fórmula acorde a esta relación.

5. La superficie de una esfera varía directamente al cuadrado de su radio. La tabla a continuación muestra esta relación

Radio (cm)	2	5	7	8
Área (cm^2)	16π	100π	196π	256π

(a) Encuentre la fórmula que modela el área, en términos del radio

(b) Halle el área de la superficie de una esfera de 0.25cm de radio.

6. El período de un péndulo varía directamente a la raiz cuadrada de su longitud. La tabla a continuación muestra esta relación

Longitud (cm)	25	36	49	64
Período (segundos)	3.19π	3.83π	4.47π	5.11π

(a) Encuentre la fórmula que modela el período, en términos de la longitud del péndulo

(b) Halle el período de un péndulo de 225 cm de longitud.

7. La *glotocronología* es una metodología que permite conocer cuántos años han trascurrido desde el momento en que dos lenguas se separan de un tronco o ancestro común. La *ecuación fundamental de la glotocronología* es

$$N(t) = N_0 e^{-0.217t}$$

N_0 representa el número de palabras usadas con el mismo significado en ambas lenguas, cuando $t = 0$. En el momento en que el italiano se separó del latín clásico, 500 palabras eran usadas en ambos idiomas con el mismo significado, si t se mide en miles de años, 2200 despúes de la separación, ¿cuántas de las 500 palabras se seguirán usando con el significado original?

8. Una persona tiene una concentración de alcohol en sangre de $0.32\frac{mg}{dl}$, esta concentración decae en forma exponencial, reduciéndose a una cuarta parte cada una hora.

(a) ¿Qué concentración de alcohol en sangre tendrá la persona una hora despúes?

(b) ¿Cómo sería la fórmula que permite calcular la concentración de alcohol en cualquier instante?

Solución

S. E. 1. Se necesita que los dos triángulos tengan la misma área,

$$A_{\triangle 1} = \frac{b_1 h_1}{2} = A_{\triangle 2} = \frac{b_2 h_2}{2}$$

Pero, la base del triángulo dos es el 80% de la base del triángulo uno, $b_2 = 0.8b_1$ entonces, $A_{\triangle 2} = \dfrac{0.8 b_1 h_2}{2} = \dfrac{b_1 h_1}{2}$ esta igualdad, permite concluir que $0.8h_2 = h_1$ equivalente a

$$h_2 = \frac{10h_1}{8} = 1.25h_1$$

h_2 debe aumentarse en un 25%.

S. E. 2. D y d representarán las diagonales de cada uno de los rombos. Se necesita que los dos rombos tengan la misma área,

$$A_{\diamond 1} = \frac{D_1 d_1}{2} = A_{\diamond 2} = \frac{D_2 d_2}{2}$$

Pero, una de las diagonales de uno de los rombos, se aumentó en un 25%, esto se modela, $D_2 = 1.25D_1$, entonces,

$$\frac{D_1 d_1}{2} = \frac{1.25 D_1 d_2}{2}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= 1.25 d_2 = \frac{125 d_2}{100} = \frac{5 d_2}{4} \\ &\Rightarrow \ d_2 = \frac{4 d_1}{5} \end{aligned}$$

d_2 debe disminuirse en un 20%.

S. E. 3. $S = k\dfrac{P^2}{\sqrt[3]{H}}$ siendo k una constante por determinar.

S. E. 4. $M = k\dfrac{J^3}{T^2}$ siendo k una constante por determinar.

S. E. 5. Usando la información suministrada en la tabla, y teniendo en cuenta que la variación de la superficie de la esfera es proporcional al cuadrado del radio: $S_E = kr^2$, se tiene que:

$$k = \frac{16\pi}{2^2} = \cdots = \frac{256\pi}{8^2} = 4\pi$$

La fórmula sería:

$$S_E = 4\pi r^2$$

La superficie de una esfera de 0.25 centímetros de radio sería:

$$S_E = 4\pi 0.25^2 = 0.25\pi$$

S. E. 6 Usando la información suministrada en la tabla, y teniendo en cuenta que la variación del período de un péndulo es proporcional a la raiz cuadrada de su longitud: $T = k\sqrt{L}$, se tiene que:

$$k = \frac{3.19\pi}{\sqrt{25}} = \cdots = \frac{5.11\pi}{\sqrt{64}} = 0.638\pi$$

La fórmula sería:

$$T = 0.638\pi\sqrt{L}$$

El período de un péndulo de 225 centímetros de longitud sería:

$$T = 0.638\pi\sqrt{225} = 9.57\pi$$

S. E. 7. Se necesita conocer el valor de N_0, este valor se puede determinar teniendo en cuenta que cuando $t = 0$, había 500 palabras en común

$$N(0) = N_0 e^{-0.217 \times 0} = 500 \Rightarrow N_0 = 500$$

La ecuación fundamental es: $N(t) = 500e^{-0.217 \times t}$. Cuando han pasado 2200 años, y teniendo en cuenta que el tiempo se mide en miles, $N(2.2) = 500e^{-0.217 \times 2.2} = 310.\,20$ hay unas 310 palabras en común.

S. E. 8 La concentración decae exponencialmente a medida que transcurre el tiempo: $C(t) = ka^t$, al momento de hacerse la primera observación, $t = 0$, la concentración es de $0.32\frac{mg}{dl}$ y una hora despúes, $t = 1$, la concentración, al haberse reducido a una cuarta parte, es de $0.08\frac{mg}{dl}$, luego,

$$\begin{aligned} C(0) &= ka^0 = 0.32 \Rightarrow k = 0.32 \\ C(1) &= 0.32a^1 = 0.08 \Rightarrow a^1 = a = \frac{0.08}{0.32} = 0.25 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como era de esperar $a = \dfrac{1}{4}$, $C(t) = 0.32\left(\dfrac{1}{4}\right)^t$