UNIVERSIDAD DEL NORTE
EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS BÁSICAS. TIPO 2
06 DE NOVIEMBRE DE 2018
*NOMBRE:*____

Información útil:

F.P.D.	F.P.I.	F.E.
$y = f(x) = kx^p$	$y = f(x) = \dfrac{k}{x^p}$	$y = f(x) = ka^x$

En todos los casos, $p \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$,

1. (valor: 1.6) El volumen de un cono circular recto es directamente proporcional a la altura (h) y al cuadrado del radio del círculo de la base, (r) y , se obtiene mediante la fórmula:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

   (a) Si el radio de la base se reduce a la mitad y la altura se deja fija, ¿qué relación existirá entre el volumen inicial y el final?

   (b) Si se construye un cono cuya altura sea 3 veces la de otro cono y ambos tienen radios de igual medida, ¿qué relación habrá entre los volúmenes de los dos conos?

   (c) Si se construye un cono cuyo radio sea tres veces el radio del otro, ¿cómo debe modificarse la altura si se necesita que ambos conos tengan el mismo volumen?

   (d) ¿En cuánto se modifica el volumen si el radio se aumenta en un 20% y la altura se disminuye en un 10%

2. (valor: 1.0) La superficie de una esfera varía directamente al cuadrado de su radio. Sabiendo que la superficie de una esfera de radio $6cm$ es de $144\pi cm^2$, encuentre:

   (a) la fórmula que modela el área, en términos del radio.

   (b) El área superficial de una esfera de 0.81 cm de radio.

3. (valor: 1.0) La ecuación $F = k\dfrac{q_1 q_2}{d^2}$ establece la fuerza de atracción eléctrica entre dos cargas puntuales, q_1 y q_2, separadas una distancia d . Describa esta ecuación en palabras.

4. (valor: 1.4) Se observa un proceso en el cual un objeto se divide en 6 objetos iguales cada 5 minutos, si se tienen inicialmente 8 objetos, con los cuales se inicia el proceso, cuando hayan transcurrido 24 minutos, ¿cuántos objetos habrá? Muestre la fórmula que permite modelar la situación.

SOLUCIÓN

1. Como la altura se deja fija y el radio se reduce a la mitad, se tendría que $h_f = h_i$ y que $r_f = \frac{1}{2}r_i$ entonces para el cono inicial se tendría

$$V_i = \frac{\pi}{3}r_i^2 h_i$$

y para el final

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{\pi}{3}r_f^2 h_f = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}r_i\right)^2 h_i \\ &= \frac{\pi}{3}\frac{1}{4}r_i^2 h_i = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}r_i^2 h_i\right) = \frac{1}{4}V_i \end{aligned}$$

Al ser la altura de uno de los conos tres veces la altura del otro con radios iguales, se tendría:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi}{3}r_1^2 h_1 \\ V_2 &= \frac{\pi}{3}r_2^2 h_2 \end{aligned}$$

supongamos que la altura del cono dos es el triple de la altura del cono uno, entonces, $h_2 = 3h_1$ y

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi}{3}r_1^2 h_1 \\ V_2 &= \frac{\pi}{3}r_2^2 3h_1 = 3\left(\frac{\pi}{3}r_2^2 h_1\right) = 3\left(\frac{\pi}{3}r_1^2 h_1\right) = 3V_1 \end{aligned}$$

El cono dos tendría el triple de volumen. Los dos cono deben tener el mismo volumen pero uno de ellos tiene un radio que es el triple del radio del otro, digamos que

$$r_2 = 3r_1$$

el volumen de cada uno de estos conos es

$$V_1 = \frac{\pi}{3}r_1^2 h_1, V_2 = \frac{\pi}{3}r_2^2 h_2 \text{ y } r_2 = 3r_1$$

como $V_1 = V_2$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}r_1^2 h_1 &= \frac{\pi}{3}r_2^2 h_2 \text{ y } r_2 = 3r_1 \Rightarrow \\ \frac{\pi}{3}r_1^2 h_1 &= \frac{\pi}{3}(3r_1)^2 h_2 = 9\left(\frac{\pi}{3}r_1^2 h_2\right) \Rightarrow \\ h_1 &= 9h_2 \end{aligned}$$

Es necesario que la altura del cono uno sea nueve veces la altura del cono dos. Si el radio se aumenta en un 20% y la altura se disminuye en un 10%, se tendría un cono que con relación al radio inicial, tendría un radio que se podría expresar como

$$r_f = r_i + 0.2r_i = 1.2r_i$$

y una altura final, que con relación a la inicial sería:

$$h_f = h_i - 0.1h_i = 0.9h_i$$

el volumen de este cono sería entonces,

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{\pi}{3}r_f^2 h_f = \frac{\pi}{3}(1.2r_i)^2 0.9h_i = \frac{\pi}{3}1.2^2 r_i^2 0.9h_i \\ &= \frac{\pi}{3}1.44r_i^2 0.9h_i = 1.44 \times 0.9\left(\frac{\pi}{3}r_i^2 h_i\right) \\ &= 1.296\left(\frac{\pi}{3}r_i^2 h_i\right) = 1.296V_i \end{aligned}$$

El nuevo cono tendría un aumento de volumen de 29.6% con relación al inicial.

2. Como la superficie de la esfera depende directamente del cuadrado del radio, se tendría que $S_e(r) = kr^2$, como una esfera de radio $6cm$ tiene un área superficial de $144\pi cm^2$,

$$\begin{aligned} S_e(6) &= k \times (6cm)^2 = 144\pi cm^2 \Rightarrow \\ k &= \frac{144\pi cm^2}{(6cm)^2} = \frac{144\pi cm^2}{36cm^2} = 4\pi \end{aligned}$$

La ecuación que modela la superficie de la esfera, en función del radio, es, $S_e(r) = 4\pi r^2$. El área superficial de una esfera de $0.81cm$ de radio es:

$$S_e(0.81) = 4\pi(0.81cm)^2 = 4\pi \times 0.6561cm^2 = 2.6244\pi cm^2$$

3. La fuerza de atracción eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

4. La situación se puede modelar mediante una función exponencial, se está buscando una ecuación del tipo $f(t) = ka^t$. Si cada objeto se divide en seis objetos iguales cada cinco minutos y el proceso se inicia con ocho de estos objetos, significa que cuando $t = 0$, $f(0) = ka^0 = 8$, como todo número real distinto de cero, elevado a la cero, es igual a uno, se concluye que $k = 8$. Cuando hayan pasado cinco minutos cada uno de los ocho objetos iniciales se habrá dividido en seis, habrán 48 objetos, entonces

$$f(5) = 8a^5 = 48 \Rightarrow a^5 = \frac{48}{8} = 6 \Rightarrow a = \sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$$

La función que se busca es:

$$f(t) = 8\left(6^{\frac{1}{5}}\right)^t = 8 \times 6^{\frac{t}{5}}$$

Cuando hayan transcurrido 24 minutos se tiene:

$$f(24) = 8 \times 6^{\frac{24}{5}} = 8 \times 5434.0797 = 43472.6374$$

habrían 43472 objetos.