UNIVERSIDAD DEL NORTE

Universidad del Norte
Cálculo III ANEC

Taller de Estudio 2
Optimización de dos Variables

- Encuentre los puntos críticos de la función dada y clasifique cada uno como máximo, mínimo o punto de silla

1. $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$
2. $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$
3. $f(x,y) = xy$
4. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + 14y$
5. $f(x,y) = \frac{16}{x} + \frac{6}{y} + x^2 - 3y^2$
6. $f(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$
7. $f(x,y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$
8. $f(x,y) = (x-1)^2 + y^3 - 3y^2 - 9y + 5$
9. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$
10. $f(x,y) = -x^4 - 32x + y^3 - 12y + 7$
11. $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$
12. $f(x,y) = (x-4)\ln(xy)$
13. $f(x,y) = x^3 - 4xy + y^3$
14. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 4}$
15. $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-6y)}$
16. $f(x,y) = 2x^4 + x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 2y + 5$
17. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1}$
18. $f(x,y) = xye^{\left(\frac{16x^2+9y^2}{288}\right)}$
19. $f(x,y) = x\ln(\frac{y^2}{x}) + 3x - xy^2$
20. $f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2 + 4x - 2y$

- **Aplicaciones**

1. Una empresa tiene tres factorías que producen el mismo artículo. Sean x, y, z, respectivamente, los números de unidades que producen cada una de las tres factorías para cubrir un pedido total de 2.000 unidades. Así $x + y + z = 2000$. Las funciones de costes de las tres factorías son

$$C_1(x) = 200 + \frac{1}{100}x^2, \qquad C_2(y) = 200 + y + \frac{1}{300}y^3, \qquad C_3(z) = 200 + 10z$$

El coste total de producir el pedido es

$$C = C_1(x) + C_2(y) + C_3(z)$$

Hallar los valores x, y y z que minimizan a C. (**Indicación:** Reducir el problema a uno en sólo dos variables despejando z de $x + y + z = 2000$)

2. Si x, y y z son números positivos tales que $x + 3y + 4z = 108$, hallar el valor máximo del producto $P = xyz$. (**Indicación:** Convertir P en una función de y, z eliminando la variable x)

3. Los beneficios anuales (en millones de dólares) de una empresa están dados por

$$P(x, y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102$$

donde x es la cantidad invertida en investigación (en millones de dólares) e y es el gasto publicitario (también en millones de dólares).

(a) Hallar los beneficios cuando $x = 10, y = 8$ y cuando $x = 12, y = 10$.

(b) Hallar los valores x e y que maximizan los beneficios, junto con el beneficio correspondiente.

4. Una tienda vende dos marcas de camisas competidoras, una de ellas apoyada por Tim Duncan y la otra por Shaq O'Neal. El propietario de la tienda puede obtener ambos tipos a un costo de \$2 por camisa y estima que si las camisas Duncan se venden en x dólares por pieza, y las camisas O'Neal en y dólares por pieza, los consumidores comprarán aproximadamente $40 - 50x + 40y$ camisas Duncan y $20 + 60x - 70y$ camisas O'Neal todos lo días. ¿ A qué precio debe vender el propietario las camisas para generar la máxima utilidad posible?

5. Una compañía telefónica está planeando introducir dos nuevos tipos de sistemas ejecutivos de comunicación que espera vender a sus clientes comerciales más importantes. Se estima que si al primer tipo de sistema se aplica un precio de x cientos de dólares por sistema, y al segundo tipo, de y cientos de dólares por sistema, aproximadamente $40 - 8x + 5y$ consumidores comprarán el primer tipo y $50 + 9x - 7y$ comprarán el segundo tipo. Si el costo de fabricación del primer tipo es \$1000 por sistema y el costo de fabricar el segundo tipo es \$3000 por sistema, ¿qué precio debe aplicar la compañía telefónica a sus sistemas para generar la máxima utilidad posible?

(**Indicación ejercicios 4,5:** Utilidad total=(artículos vendidos)·(utilidad por articulo x)+(artículos vendidos)·(utilidad por articulo y))

6. Una compañía produce x unidades de la mercancía A y y unidades de la mercancía B. Todas las unidades se pueden vender en $p = 100 - x$ dólares por unidad de A y $q = 100 - y$ dólares por unidad B. El costo (en dólares) de producir estas unidades está dado por la función costo conjunto $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. ¿Qué valor deben tener x y y para maximizar la utilidad?

7. Repita el problema anterior para el costo donde $p = 20 - 5x$, $q = 4 - 2y$, y $C = 2xy + 4$.

(**Indicación:** Utilidad $P = px + qy - C$)

[**Nota:** Verificar o investigar si las indicaciones dadas son correctas]

- Use el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo relativo indicado. Se puede suponer que tal extremo existe.

 1. Encuentre el valor máximo de $f(x, y) = xy$ sujeto a la restricción $x + y = 1$.

 2. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función de $f(x, y) = xy$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

 3. Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $xy = 1$.

 4. Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x, y) = x^2+2y^2-xy$ sujeto a la restricción $2x + y = 22$.

 5. Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

 6. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función de $f(x, y) = 8x^2 - 24xy + y^2$ sujeto a la restricción $8x^2 + y^2 = 1$.

 7. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función de $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

 8. Encuentre el valor máximo de la función de $f(x, y) = xy^2$ sujeto a la restricción $x + y = 1$.

 9. Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$ sujeto a la restricción $x + y = 15$.

 10. Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x, y) = 2x^2+y^2+2xy+4x+2y+7$ sujeto a la restricción $4x^2 + 4xy = 1$.

 11. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función de $f(x, y) = e^{xy}$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

 12. Encuentre el valor máximo de la función de $f(x, y) = \ln(xy^2)$ sujeto a la restricción $2x^2 + 3y^2 = 8$ para $x > 0$ y $y > 0$.

- **Aplicaciones**

 1. La producción P, como función de dos insumos x, y, está dada por

 $$P = x^2 + 5xy - 4y^2$$

 Evaluar las cantidades de x y de y que maximizan la producción si $2x + 3y = 74$

 2. El costo de producción C , en una función de las cantidades producidas, x y y, de dos tipos de artículos, está dado por

 $$C = 6x^2 + 3y^2$$

Para minimizar tal costo, ¿qué cantidad de cada uno de los dos artículos debe producirse si $x + y = 18$

3. El importe de las ventas S, como función de las sumas x y y gastadas en dos tipos de promoción comercial, está dado por

$$S = \frac{240x}{25 + 3x} + \frac{150y}{10 + y}$$

La utilidad neta es= $\frac{1}{10}S - x - y$. Determine la asignación de x y y que maximizará la ganancia neta si $x + y = 15$

4. El costo de las reparaciones, C, en función de los números x y y de inspecciones en dos puntos de un proceso industrial, está dado por

$$C = 2x^2 + 3y^2 + xy - 22x + 5$$

Para minimizar tal costo, ¿qué número de inspección deberá llevarse a cabo en cada punto si $x - y = 2$?

5. La función de producción de una empresa es

$$P(l, k) = 24l + 40k - 2l^2 - 6k^2$$

Donde el costo de l y k es de \$3 y \$6 por unidad, respectivamente. Si la empresa quiere que el costo total de insumos sea \$12960, encuentre la producción máxima posible sujeta a este control presupuestario.

6. Un consumidor tiene \$280 para gastar en dos mercancías, la primera de las cuales cuesta \$2 por unidad y la segunda cuesta \$5 por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor por x unidades de la primera mercancía, y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la función de utilidad de Cobb-Douglas $U(x, y) = 100x^{0,25}y^{0,75}$. ¿Cuántas unidades de cada mercancía debe comprar el consumidor para maximizar la utilidad?

7. Un consumidor tiene k dólares para gastar en dos mercancías, la primera de las cuales cuesta a dólares por unidad y la segunda cuesta b dólares por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor por x unidades de la primera mercancía, y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la función de utilidad de Cobb-Douglas $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$, donde $0 < \alpha < 1$ y $\alpha + \beta = 1$. Demuestre que la utilidad se maximiza cuando

$$x = \frac{k\alpha}{a} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{k\beta}{b}$$

REFERENCIA

1. Matemáticas para el Análisis Económico, Knut Sydsaeter-Peter Hammond, Pearson.
2. Cálculo Aplicado para administración, economía y ciencias sociales, Laurence D. Hoffmann, 8° edición, Mc. Graw Hill.
3. Matemáticas para administración y economía,Jeam E. Weber, 4^a edición.