

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
EXAMEN FINAL DE CALCULO I
201910
A

Nombre y Apellidos _____

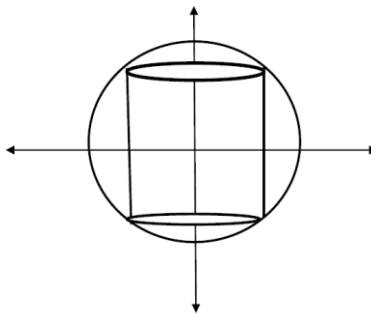
No se permite el uso de ningún tipo de apuntes, libros o intercambio de los mismos. Cualquier dispositivo electrónico, en particular su celular, debe permanecer apagado durante el examen. Puede usar su calculadora normal (no graficadoras). No acatar éstas órdenes será motivo de anulación del examen.

Todos los puntos del examen tienen igual valoración

Nota: para obtener el máximo puntaje en cada pregunta, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada el procedimiento completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 90 minutos.

1. Dada $f(x) = x^4 - 4x^2$
 - a. Hallar los puntos críticos, intervalos donde la función es creciente o decreciente y los extremos relativos.
 - b. Hallar los intervalos de concavidad, los puntos de inflexión y dibuje la gráfica de la función.
2. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a razón de $0.01 \text{ m}^3/\text{min}$ al mismo tiempo que se bombea agua a una razón constante. El depósito mide 9 m de alto y el diámetro en la parte superior es de 6 m. Si el nivel del agua se eleva a razón de $0.3 \text{ m}/\text{min}$ cuando la altura es 2 m, encuentre la razón a la que el agua está siendo bombeada al tanque. ($\text{Volumen del cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)
3. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo que puede ser inscrito en una esfera de radio 25 cm.



($\text{Volumen del cilindro} = \pi r^2 h$)

4. Resuelva.
 - a. Dada $f(x) = (1 + x)^k$, $k \in \mathbb{R}$. Pruebe que la aproximación lineal de f en $a = 0$ es $L(x) = 1 + kx$
 - b. Use la regla de L'Hôpital para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4x} + 3x}{e^{4x} + 2x}$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
EXAMEN FINAL DE CALCULO I
201910
B

Nombre y Apellidos _____

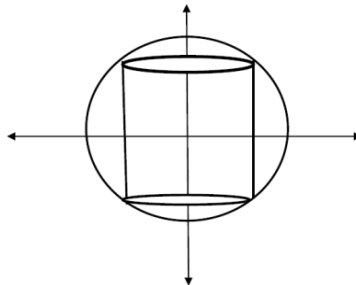
No se permite el uso de ningún tipo de apuntes, libros o intercambio de los mismos. Cualquier dispositivo electrónico, en particular su celular, debe permanecer apagado durante el examen. Puede usar su calculadora normal (no graficadoras). No acatar éstas órdenes será motivo de anulación del examen.

Todos los puntos del examen tienen igual valoración

Nota: para obtener el máximo puntaje en cada pregunta, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada el procedimiento completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 90 minutos.

1. Dada $f(x) = 4x^2 - x^4$
 - a. Hallar los puntos críticos, intervalos donde la función es creciente o decreciente y los extremos relativos.
 - b. Hallar los intervalos de concavidad, los puntos de inflexión y dibuje la gráfica de la función.
2. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a razón de $0.01 \text{ m}^3/\text{min}$ al mismo tiempo que se bombea agua a una razón constante. El depósito mide 6 m de alto y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a razón de $0.2 \text{ m}/\text{min}$ cuando la altura es 2 m, encuentre la razón a la que el agua está siendo bombeada al tanque. ($\text{Volumen del cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)
3. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo que puede ser inscrito en una esfera de radio 15 cm.



($\text{Volumen del cilindro} = \pi r^2 h$)

4. Resuelva.
 - a. Dada $f(x) = (1 + x)^m$, $m \in \mathbb{R}$. Pruebe que la aproximación lineal de f en $a = 0$ es $L(x) = 1 + mx$
 - b. Use la regla de L'Hôpital para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{4x} - 2x}{e^{4x} - 3x}$$

CRITERIOS DE EVALUACIÓN.

Todos las preguntas se califican sobre 5 .

1. Dada $f(x) = 4x^2 - x^4$

a. Hallar los puntos críticos, intervalos donde la función es creciente o decreciente y los extremos relativos.

b. Hallar los intervalos de concavidad, los puntos de inflexión y dibuje la gráfica de la función.

- Halla sin errores la primera derivada, encuentra todos los puntos críticos, los intervalos donde la función crece o decrece y los extremos relativos.....2.5 puntos

- Además de lo anterior**, halla la segunda derivada , encuentra los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo , determina los puntos de inflexión y traza la gráfica de la función de tal manera que contenga las características halladas en los pasos anteriores..... 5 puntos.

2. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a razón de $10000 \text{ cm}^3/\text{min}$ al mismo tiempo

que se bombea agua a una razón constante. El depósito mide 6 m de alto y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a razón de $20 \text{ cm}/\text{min}$ cuando la altura es 2 m, encuentre la razón a la que el agua está siendo bombeada al tanque.

- Interpreta gráficamente el problema , simboliza las magnitudes que son variables y las que son constantes e identifica las razones de cambio dadas y pedidas.....1.5 puntos

- Hace bien lo anterior** , además halla una relación entre las variables y una relación entre las razones de cambio,..... 4.puntos.

- Hace bien lo anterior**, además utiliza bien los datos unificando las unidades de medida5 puntos.

3. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo que puede ser inscrito en una esfera de radio 15 cm.

- Simboliza las magnitudes que son variables y las que son constantes y construye una función de una variable que calcula el volumen del cilindro inscrito en la esfera2 puntos.

- Hace bien lo anterior , además deriva correctamente la función hallada y determina el o los puntos críticos de acuerdo al contexto del problema.... 4 puntos

- Además de los dos pasos anteriores, **argumenta correctamente porque el valor critico hallado optimiza la función construida en el primer paso** y obtiene la solución pedida..... 5 puntos.

4. Resuelva.

a. Dada $f(x) = (1 + x)^m$, $m \in \mathbb{R}$. Pruebe que la aproximación lineal de f en $a = 0$ es $L(x) = 1 + mx$

- Ejecuta correctamente el procedimiento para calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.....2 puntos.

- Además de lo anterior, no comete errores numéricos y logra expresar la ecuación de la recta tangente en la forma pedida.....2.5 punto6

b. Use la regla de L'Hôpital para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{4x} - 2x}{e^{4x} - 3x}$$

- Utiliza correctamente la regla sin cometer errores al derivar o errores algebraicos al simplificar.....2 puntos.

- Además de lo anterior no comete errores numéricos al remplazar la variable y realizar los cálculos para obtener la respuesta 2.5 puntos